UM6P - College of Computing
CPI2 - 2025/2026

Cours d'Analyse III - Annexe de Démonstrations du Cours

Pr. Taha EL BAKKALI EL KADI.
Rédaction de : Diaa Eddine ZAINI.

Contents

Topologie des Espaces Vectoriels Normés

Théorème 1 : Inégalité Triangulaire :

$(E, \|\cdot\|)$ designe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Soient $x, y \in E$. Alors

$$\left|\|x\| - \|y\|\right| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\| .$$

Démonstration. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ n'est que l'inégalité triangulaire. En substituant y par $-y$, on trouve,

$$\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| .$$

Maintenant,

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| ,$$

ainsi, $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. Par symétrie de rôles, $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$ ce qui fournit

$$\left|\|x\| - \|y\|\right| \leq \|x - y\| .$$

En substituant y par $-y$, on trouve encore

$$\left|\|x\| - \|y\|\right| \leq \|x + y\| .$$

$\blacksquare$

Théorème 2 : Inégalité de Cauchy-Schwarz :

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Notons $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire *ie.* l'application $\|\cdot\| : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{array}$. Alors

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\| ,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés.

Démonstration. La norme euclidienne est bien définie par positivité du produit scalaire. La propriété est évidente si $y = 0$. Dorénavant, on suppose le contraire.

Soit $t \in \mathbb{K}$ puis notons l'application $\varphi(t) = \|x - ty\|^2$. Alors,

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \|x - ty\|^2 \\
&= \langle x - ty, x - ty\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - t\langle x, y\rangle - \bar{t}\langle y, x\rangle + t\bar{t}\langle y, y\rangle \\
&= \|x\|^2 - \left(t\langle x, y\rangle + \overline{t\langle x, y\rangle}\right) + |t|^2 \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\,(t\langle x, y\rangle) + |t|^2 \|y\|^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\forall t \in \mathbb{K}, \quad 2\mathrm{Re}\,(t\langle x, y\rangle) \leq \|x\|^2 + |t|^2 \|y\|^2 .$$

En particulier pour $t_0 = \dfrac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\|y\|^2}$, l'inégalité devient :

$$\begin{aligned}
2\mathrm{Re}\left(\frac{\langle x, y\rangle\overline{\langle x, y\rangle}}{\|y\|^2}\right) \leq \|x\|^2 + \left|\frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\|y\|^2}\right|^2 \|y\|^2 &\iff \frac{2}{\|y\|^2}\mathrm{Re}\left(|\langle x, y\rangle|^2\right) \leq \|x\|^2 + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} \\
&\iff 2\,|\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 + |\langle x, y\rangle|^2 \\
&\iff |\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 .
\end{aligned}$$

Le passage à la racine carrée donne l'inégalité désiriée. Maintenant, on obtient l'égalité si et seuelement si $\varphi(t_0) = 0$, soit $\|x - t_0 y\| = 0$ puis $x - t_0 y = 0$, ou encore que la famille (x, y) est liée. $\blacksquare$

Théorème 3 : Norme Euclidienne :

L'application "norme euclidienne" est une norme.

Démonstration. L'application $\|\cdot\|$ est bien définie et est positive par positivité de la fonction racine carrée.

- **Homogénéité** : soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x\rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda| \, \|x\| \, .$$

- **Séparation** : soit $x \in E$. Supposons que $\|x\| = 0$. Alors $\langle x, x\rangle = 0$ puis $x = 0$ par définition du produit scalaire.

- **Inégalité triangulaire** : soient $x, y \in E$.

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\langle x, y\rangle\right) + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\left|\langle x, y\rangle\right| + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\
&= \left(\|x\| + \|y\|\right)^2 .
\end{aligned}$$

Ceci fournit $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. On a montré que $\|\cdot\|$ est une norme sur E. ∎

Théorème 4 : Quelques Normes sur $\mathbb{K}^d$:

Soient sur $\mathbb{K}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$) les applications suivantes :

$$\|\cdot\|_1 : (x_1, \cdots, x_d) \longmapsto \sum_{k=1}^{d} |x_k| , \qquad \|\cdot\|_2 : (x_1, \cdots, x_d) \longmapsto \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} ,$$

$$\|\cdot\|_\infty : (x_1, \cdots, x_d) \longmapsto \max_{1\leq k\leq d} |x_k| .$$

Les applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^d$.

Démonstration. Commençons par $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

- Les applications $\|\cdot\|_1$ $\|\cdot\|_2$ sont bien définies et sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

  ⋆ **Homogénéité** :

$$\forall x = (x_k)_{1\leq k\leq d} \in \mathbb{K}^d, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \|\lambda x\|_1 = \|(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_d)\|_1 = \sum_{k=1}^{d} |\lambda x_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^{d} |x_k| = |\lambda| \, \|x\|_1$$

et

$$\forall x = (x_k)_{1\leq k\leq d} \in \mathbb{K}^d, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \|\lambda x\|_2 = \|(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_d)\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{d} |\lambda x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|\lambda|^2} \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \, \|x\|_2 \, .$$

  ⋆ **Séparation** : soit $x = (x_k)_{1\leq k\leq d} \in \mathbb{K}^d$. Supposons que $\|x\|_1 = 0$. Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{d} |x_k| = 0$ puis $\forall k \in [\![1, d]\!], x_k = 0$ ou encore $x = 0$.

Idem, si $\|x\|_2$, alors $\forall k \in [\![1, d]\!], \quad |x_k|^2 = 0$ puis $x_k = 0$.

  ⋆ **Inégalité triangulaire** : soient $x = (x_k)_{1\leq k\leq d}$, $y = (y_k)_{1\leq k\leq d} \in \mathbb{K}^d$. Alors :

$$\|x+y\|_1 = \left\|(x_k + y_k)_{1\leq k\leq d}\right\|_1$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{d} |x_k + y_k| \\
&\leq \sum_{k=1}^{d} (|x_k| + |y_k|) \\
&= \|x\|_1 + \|y\|_1
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|_2 &= \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k + y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{d} |y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{Inégalité de Minkowski} \\
&= \|x\|_2 + \|y\|_2 .
\end{aligned}
$$

• Maintenant, la partie $\mathscr{E} = \{|x_k|, \quad k \in [\![1, d]\!]\}$ est une partie finie de $\mathbb{R}_+$. Son maximum alors existe et est un élément de $\mathbb{R}_+$, justifiant que $\|\cdot\|_\infty$ est une application bien définie à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

⋆ **Homogénéité** : une méthode *entre autres* est la suivante : soient $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{K}^d$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $k_0 \in [\![1, d]\!]$ tel que $|x_{k_0}| = \max \mathscr{E} = \|x\|_\infty$. Soit $k \in [\![1, d]\!]$. Alors $|\lambda x_k| = |\lambda| |x_k| \leq |\lambda| |x_{k_0}| = |\lambda| \|x\|_\infty$. Alors $\|\lambda x\|_\infty = \max\limits_{1\leq k\leq d} |\lambda x_k| \leq |\lambda| \|x\|_\infty$. Inversement, $|\lambda| |x_{k_0}| \in \{|\lambda| |x_k|, \quad k \in [\![1, d]\!]\}$ donc $|\lambda| \|x\|_\infty = |\lambda| |x_{k_0}| \leq \max\limits_{1\leq k\leq d} |\lambda x_k| = \|\lambda x\|_\infty$. L'égalité est établie.

⋆ **Séparation** : soit $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{K}^d$ tel que $\|x\|_\infty = 0$. Alors $\forall k \in [\![1, d]\!], \quad 0 \leq |x_k| \leq \|x\|_\infty = 0$ ou encore $x = 0$.

⋆ **Inégalité triangulaire** : soient $x = (x_k)_{1\leq k\leq d}, y = (y_k)_{1\leq k\leq d} \in \mathbb{K}^d$. Alors :

$$
\forall k \in [\![1, d]\!], \quad |x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty
$$

puis $\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$. ■

Théorème 5 : Quelques Normes en Dimension Finie :

Supposons que E est de dimension finie $d \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_d)$ une base de E. Pour tout $x = \sum\limits_{k=1}^{d} x_i e_i \in E$, on définit

$$
\|x\|_{1,\mathscr{B}} = \sum_{k=1}^{d} |x_k|, \qquad \|x\|_{2,\mathscr{B}} = \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \|x\|_{\infty,\mathscr{B}} = \max_{1\leq k\leq d} |x_k| .
$$

Les applications $\|x\|_{1,\mathscr{B}}$, $\|x\|_{2,\mathscr{B}}$ et $\|x\|_{\infty,\mathscr{B}}$ sont des normes sur E.

Démonstration. Analogue à celle du Théorème 4. ■

Théorème 6 : Normes de Matrices :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Les applications

$$
\|\cdot\|_1 : \quad \begin{aligned} \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq p} &\longmapsto \max_{1\leq j\leq p} \left(\sum_{i=1}^{p} |a_{i,j}|\right) \end{aligned}
$$

et

$$
\|\cdot\|_\infty : \quad \begin{aligned} \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq p} &\longmapsto \max_{1\leq i\leq p} \left(\sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}|\right) \end{aligned}
$$

sont des normes sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Démonstration. Facile à établir en utilisant les mêmes techniques que précédement. ■

Théorème 7 : Norme Infinie des Fonctions :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et X une partie non vide de E. Soit $\mathcal{B}(X, E)$ l'espace des applications bornées de X dans E *ie.* l'ensemble des applications $f : X \longrightarrow E$ vérifiant $\exists M \geq 0 / \forall x \in X, \quad \|f(x)\| \leq M$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty : \ \mathcal{B}(X, E) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\longmapsto \sup_{x \in X} \|f(x)\| \end{aligned}$$

est une norme sur $\mathcal{B}(X, E)$ appelée norme infinie.

Démonstration. Pour $f \in \mathcal{B}(X, E)$, la partie $\{\|f(x)\|, x \in X\}$ est non vide et majorée dans $\mathbb{R}_+$ donc admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}_+$. Ceci montre que la norme infinie est bien définie et vérifie l'axiome de positivité.

• **Homogénéité** : Soient $f \in \mathcal{B}(X, E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $x \in X$. La propriété est immédiate si $\lambda = 0$. Supposons dorénavant le contraire. Alors,

$$\begin{aligned} \|(\lambda f)(x)\| &= \|\lambda f(x)\| \\ &= |\lambda| \|f(x)\| \\ &\leq |\lambda| \sup_{x \in X} \|f(x)\| \\ &\leq |\lambda| \|f\|_\infty . \end{aligned}$$

Par définition de la borne supérieure, $\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda| \|f\|_\infty$. Maintenant, soit $\varepsilon > 0$. Tant que $|\lambda| > 0$, alors

$$\exists x_0 \in X / \quad \|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{|\lambda|} < \|f(x_0)\|$$

par caractérisation de la borne supérieure. Ainsi, $|\lambda| \|f\|_\infty - \varepsilon < |\lambda| \|f(x_0)\| = \|(\lambda f)(x_0)\|$. Ainsi, $|\lambda| \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|(\lambda f)(x)\| = \|\lambda f\|_\infty$.

• **Séparation** : soit $f \in \mathcal{B}(X, E)$. Supposons que $\|f\|_\infty = 0$. Alors $\forall x \in X, \quad 0 \leq \|f(x)\| \leq 0$ puis $\forall x \in X, \quad f(x) = 0$. Ceci donne $f = 0$.

• **Inégalité triangulaire** : soient $f, g \in \mathcal{B}(X, E)$. Alors,

$$\forall x \in X, \quad \|(f+g)(x)\| = \|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$$

Ainsi, $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. ■

Théorème 8 : Norme Produit :

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, N_1), \cdots, (E_p, N_p)$ p espaces vectoriels normés. L'application

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \prod_{k=1}^{p} E_k &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x_1, \cdots, x_p) &\longmapsto \max(N_1(x_1), \cdots, N_p(x_p)) \end{aligned}$$

est une norme sur $\prod_{k=1}^{p} E_k$.

Démonstration. Simple et analogue aux précédantes. ■

Théorème 9 : Distance Associée à une Norme :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ une espace vectoriel normé. Alors l'application d définie par $\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur E.

Démonstration. d est bien définie sur $E \times E$ et est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ par positivité de la norme. Soit $(x, y) \in E^2$. Ainsi, $d(x, y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$ en vertu de l'axiome de séparation pour la norme $\|\cdot\|$. De plus, $d(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = d(y, x)$. Finalement, pour $z \in E$:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(y, z).$$

On a montré que (E, d) est un espace métrique. ■

Théorème 10 : Distance d'une Partie :

Soit A une partie non vide d'un espace métrique (E, d). Alors

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

Démonstration. Soient $(x, y) \in E^2$ et $a \in A$. Alors, $d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$, donc

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a).$$

Ainsi, $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$ par définition de la borne inférieure. Ceci donnera $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$. Par symétrie des rôles, on trouvera $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$ puis $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ (on dira que la fonction "distance à une partie" est 1-lipschitzienne). ■

Dans toute la suite, $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

Théorème 11 : Unicité de la Limite :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors sa limite est unique. Dorénavant, on peut dire dans tel cas que "ℓ est **la** limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$" et écrire "$\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$".

Démonstration. Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $(E, \|\cdot\|)$ disons vers deux vecteurs ℓ_1 et ℓ_2 non nécessairement distincts. Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geq N_1, \quad \|u_n - \ell_1\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} / \forall n \geq N_2, \quad \|u_n - \ell_2\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Alors $\forall n \geq N$,

$$\|\ell_1 - \ell_2\| = \|(u_n - \ell_2) - (u_n - \ell_1)\| \leq \|u_n - \ell_2\| + \|u_n - \ell_1\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0, \quad \|\ell_1 - \ell_2\| < \varepsilon$. Maintenant, si $\ell_1 \neq \ell_2$, alors $\|\ell_1 - \ell_2\| > 0$ donc $\|\ell_1 - \ell_2\| < \dfrac{\|\ell_1 - \ell_2\|}{2}$ puis $1 < \dfrac{1}{2}$. Ceci est absurde. On en déduit que $\ell_1 = \ell_2$. ■

Théorème 12 : Linéarité de la Limite :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Supposons que les deux suites convergent respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2. Alors la suite du terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ converge et est de limite $\lambda \ell_1 + \mu \ell_2$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang N_1 à partir duquel $\|u_n - \ell_1\| < \dfrac{\varepsilon}{2(|\lambda| + 1)}$ et un rang N_2 à partir duquel $\|v_n - \ell_2\| < \dfrac{\varepsilon}{2(|\mu| + 1)}$. Soit $n \geq \max(N_1, N_2)$.

$$\begin{aligned}
\|(\lambda u_n + \mu v_n) - (\lambda \ell_1 + \mu \ell_2)\| &= \|\lambda (u_n - \ell_1) + \mu (v_n - \ell_2)\| \\
&\leq |\lambda| \|u_n - \ell_1\| + |\mu| \|v_n - \ell_2\| \\
&\leq |\lambda| \frac{\varepsilon}{2(|\lambda| + 1)} + |\mu| \frac{\varepsilon}{2(|\mu| + 1)} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Le théorème est établi. ■

Théorème 13 : Limite et Norme :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ, alors $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\|\ell\|$.

Démonstration. Pour tout entier naturel n, $|\|u_n\| - \|\ell\|| \leq \|u_n - \ell\|$. Or le membre de droite de l'inégalité tend vers 0 par hypothèse, ce qui fournit la convergence désiriée. ■

Théorème 14 : Convergence et Bornitude :

Si une suite converge, alors elle est bornée.

Démonstration. Supposons qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Alors il existe un range N à partir duquel $\|u_n - \ell\| < 1$. Ainsi,

$$\forall n \geq N, \quad \|u_n\| \leq \|u_n - \ell\| + \|\ell\| < 1 + \|\ell\|\,.$$

Le réel $M = \max\left(\|u_0\|, \cdots, \|u_{N-1}\|, 1 + \|\ell\|\right)$ est alors un majorant de la suite du terme général $\|u_n\|$. ■

Théorème 15 : Convergence en Norme Produit :

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, N_1), \cdots (E_p, N_p)$ p espaces vectoriels normés. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\prod_{k=1}^{p} E_k\right)^{\mathbb{N}}$ de terme général $\left(a_n^{(1)}, \cdots, a_n^{(p)}\right)$. Finalement, notons φ la norme produit sur $\prod_{k=1}^{p} E_k$.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\left(\prod_{k=1}^{p} E_k, \varphi\right)$ si et seuelement si $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\left(a_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans (E_k, N_k). Dans tel cas,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \left(\lim_{n\to+\infty} a_n^{(k)}\right)_{1\leq k\leq p}.$$

Démonstration. $\Longrightarrow$) Supposons que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge disons vers $\ell = \left(\ell^{(1)}, \cdots, \ell^{(p)}\right)$. Alors

$$\varphi(a_n - \ell) = \varphi\left(a_n^{(1)} - \ell^{(1)}, \cdots, a_n^{(p)} - \ell^{(p)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![1, p]\!]$. Alors $N_k\left(a_n^{(k)} - \ell^{(k)}\right) \leq \varphi(a_n - \ell) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $\left(a_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans (E_k, N_k) et vers $\ell^{(k)}$.

$\Longleftarrow$) Réciproquement, on suppose que chaque composante $\left(a_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de la suite du terme général a_n converge vers $\ell^{(k)}$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors,

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \exists n_k \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_k, \quad N_k\left(a_n^{(k)} - \ell^{(k)}\right) < \varepsilon.$$

Soit $n_\infty = \max_{1\leq k\leq p} n_k$. Soit $n \geq n_\infty$. Alors $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\quad N_k\left(a_n^{(k)} - \ell^{(k)}\right) < \varepsilon$ puis

$$\varphi(a_n - \ell) = \max_{1\leq k\leq p} N_k\left(a_n^{(k)} - \ell^{(k)}\right) < \varepsilon.$$

Ceci montre que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ sous la norme produit. ■

Théorème 16 : Valeur d'Adhérence :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $a \in E$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) a est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) Il existe une extractrice φ telle que $\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = a$.

(3) $\forall \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0 / \quad \|u_n - a\| < \varepsilon$.

(4) $\forall \varepsilon > 0, \quad \text{card}\left(\{n \geq 0, \quad \|u_n - a\| < \varepsilon\}\right) = +\infty$.

Démonstration. **(1)** $\iff$ **(2)** est la définition. **(3)** $\iff$ **(4)** est claire. Montrons **(2)** $\iff$ **(3)**.

$\Longrightarrow$) Soit $\varepsilon > 0$. Supposons qu'il existe une extractrice φ telle que pour tout qu'il existe un rang N à partir duquel $\left\|u_{\varphi(n)} - a\right\| < \varepsilon$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Posons $n = \max\left(\varphi(N), n_0\right)$. Alors $n \geq n_0$ et $\|u_n - a\| < \varepsilon$.

$\Longleftarrow$) Réciproquement, supposons **(3)**. Alors en particulier pour $\varepsilon = 1$ et $n_0 = 0$, $\exists k \geq 0 / \quad \|u_k - a\| < 1$. Posons $\varphi(0) = k$.

Maintenant, $\exists k' \geq \varphi(0) + 1 / \quad \|u_{k'} - a\| < \dfrac{1}{2}$. Notons $\varphi(1) = k'$. Ainsi, $\varphi(1) > \varphi(0)$ et $\left\|u_{\varphi(1)} - a\right\| < \dfrac{1}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a construit $\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(n)$ de sorte que

$$\forall p \in [\![0, n]\!], \quad \left\|u_{\varphi(p)} - a\right\| < \frac{1}{1+p}.$$

Ainsi, $\exists \widetilde{k} \geq \varphi(n) + 1 / \quad \left\|u_{\widetilde{k}} - a\right\| < \dfrac{1}{n+2}$. En notant $\varphi(n+1) = \widetilde{k}$, on obtient $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et $\left\|u_{\varphi(n+1)} - a\right\| < \dfrac{1}{n+2}$. Ainsi, on a construit par récurrence une extractrice φ de sorte que

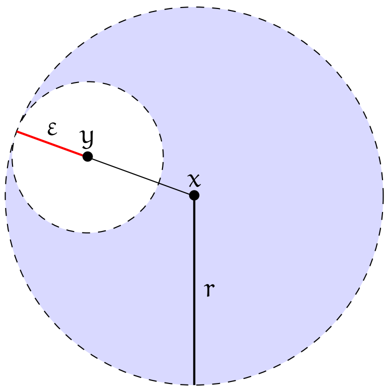
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\|u_{\varphi(n)} - a\right\| < \frac{1}{1+n}.$$

Ceci montre que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. L'équivalence est établie. ■

Théorème 17 : Boule Ouverte :

Toute boule ouverte est ouverte.

Démonstration. Soient $r > 0$ et $x \in E$. Soit $y \in B(x, r)$.



Alors $\|x - y\| < r$. Posons $\varepsilon = r - \|x - y\| > 0$. Soit $t \in B(y, \varepsilon)$. Alors

$$\begin{aligned}
\|x - t\| &= \|x - y + y - t\| \\
&\leq \|x - y\| + \|y - t\| \\
&< \|x - y\| + \varepsilon
\end{aligned}$$

$$= r$$

Ainsi, $B(y, \varepsilon) \subset B(x, r)$. On a montré que $\forall y \in B(x, r), \exists \varepsilon > 0/ \quad B(y, \varepsilon) \subset B(x, r)$, ou encore que $B(x, r)$ est un ouvert. ∎

Théorème 18 : Ouverture et Réunion/Intersection :

• Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

• Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Démonstration. Le résultat est clair si la réunion (resp. l'intersection) est vide.

• Soit $\mathcal{O}$ une famille non vide d'ouverts. Soit $X = \bigcup_{O \in \mathcal{O}} O$. Soit $x \in X$. Alors $\exists O_0 \in \mathcal{O}/ \quad x \in O_0$. Mais O_0 est un ouvert, fournissant l'existance de $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset O_0 \subset X$. On a montré que X est un ouvert.

• Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $O_1, \cdots, O_n$ n ouverts. Soit $X = \bigcap_{i=1}^{n} O_i$. Soit $x \in X$. Alors $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad x \in O_i$ donc

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \exists \varepsilon_i > 0/ \quad B(x, \varepsilon_i) \subset O_i.$$

Soit $\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i$. Alors $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad B(x, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon_i)$ puis $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad B(x, \varepsilon) \subset O_i$ ou encore $B(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^{n} O_i = X$. ∎

Théorème 19 : Ouverture et Produit Cartésien :

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, N_1), \cdots, (E_p, N_p)$ p espaces vectoriels normés. Munissons $E_1 \times \cdots \times E_p$ de la norme produit φ.

Si $O_1, \cdots, O_p$ sont des ouverts respectifs de $E_1, \cdots, E_p$, alors $O_1 \times \cdots \times O_p$ est un ouvert de $E_1 \times \cdots \times E_p$.

Démonstration. Soit $x = (x_1, \cdots, x_p) \in \prod_{i=1}^{p} O_i$. Alors $\forall i \in [\![1, p]\!], \quad x_i \in O_i$. Donc $\forall i \in [\![1, p]\!], \exists \varepsilon_i > 0/ \quad B(x_i, \varepsilon_i) \subset O_i$. Soit $\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq p} \varepsilon_i$. Soit $y = (y_1, \cdots, y_p) \in B_{E_1 \times \cdots \times E_p}(x, \varepsilon)$. Alors $\varphi(x - y) = \varphi(x_1 - y_1, \cdots, x_p - y_p) < \varepsilon$. Ainsi, $\forall i \in [\![1, p]\!], \quad N_i(x_i - y_i) < \varepsilon \leq \varepsilon_i$. Ainsi, $\forall i \in [\![1, p]\!], \quad y_i \in B(x_i, \varepsilon_i)$. Ainsi,

$$B_{E_1 \times \cdots \times E_p}(x, \varepsilon) \subset \prod_{i=1}^{p} B(x_i, \varepsilon_i) \subset \prod_{i=1}^{p} O_i.$$

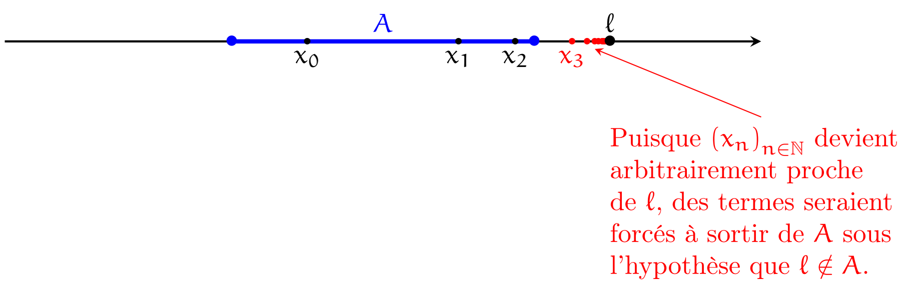
Ainsi, $\prod_{i=1}^{p} O_i$ est un ouvert. ∎

Théorème 20 : Caractérisation Séquentielle de la Fermeture :

Soit $A \subset E$.

A est fermé si et seulement si toute suite convergente à éléments dans A est de limite dans A.

Démonstration. $\Longrightarrow$) Supposons que A est fermé. Donc A^c est ouvert. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente à éléments dans A de limite, disons ℓ. Supposons par absurde que $\ell \notin A$.



Puisque $\ell \in A^c$ qui est un ouvert, alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $B(\ell, \varepsilon_0) \subset A^c$. Maintenant, $\exists N \in \mathbb{N}/\forall n \geq N, \quad \|x_n - \ell\| < \varepsilon_0$. Ainsi, x_N est un terme de la suite qui est dans $B(\ell, \varepsilon_0) \subset A^c$ donc $x_N \notin A$. Ceci est absurde. On a montré que $\ell \in A$.

$\Longleftarrow$) Inversement, raisonnons par contraposée. Supposons que A n'est pas un fermé. Construisons une suite convergente à éléments dans A de limite qui n'est pas dans A.

A^c n'est pas un ouvert. Alors il existe $x \in A^c$ tel que $\forall \varepsilon > 0, \quad B(x, \varepsilon) \not\subset A^c$ ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $B\left(x, \dfrac{1}{n+1}\right) \cap A \neq \varnothing$ ou encore,

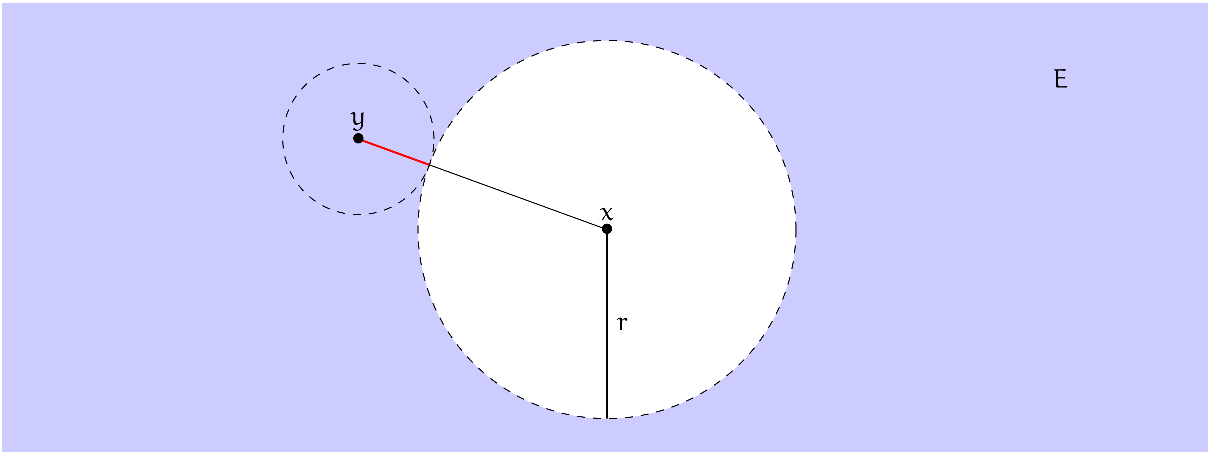
$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in A/ \quad x_n \in B\left(x, \frac{1}{n+1}\right) \cap A.$$

Ainsi, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ et $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ bien que $x \notin A$. La caractérisation est établie. ∎

Théorème 21 : Boule Fermée :

Toute boule fermée est fermée.

Démonstration. Soit $x \in E$ et $r > 0$. Montrons que $(B_f(x, r))^c$ est un ouvert. Soit $y \in (B_f(x, r))^c$. Alors, $\|x - y\| > r$.



Posons alors $\varepsilon = \|x - y\| - r > 0$. Soit $t \in B(y, \varepsilon)$. Alors $\|y - t\| < \varepsilon$ puis

$$\begin{aligned}
\|x - t\| &= \|(x - y) - (t - y)\| \\
&\geq \big|\, \|x - y\| - \|t - y\| \,\big| \\
&= \|x - y\| - \|t - y\| \\
&> \|x - y\| - \varepsilon \\
&= r.
\end{aligned}$$

Ainsi, $t \in\not\in B_f(x, r)$. On a montré que $\forall y \in (B(x, r))^c, \exists \varepsilon > 0/ \quad B(y, \varepsilon) \subset (B_f(x, r))^c$, ou encore, que $B_f(x, r)$ est un fermé. ∎

Théorème 22 : Fermeture et Réunion/Intersection :

- Une réunion finie de fermés est un fermé.
- Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

Démonstration. Le résultat est clair si la réunion (resp. intersection) est vide. Supposons le contraire.

• Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \cdots, F_n$ n fermés. Soit $X = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$. Alors $X^c = \bigcap_{i=1}^{n} F_i^c$ donc sera un ouvert par stabilité de l'ouverture par intersection finie. Ainsi, X est fermé.

• Soient $\mathcal{F}$ une famille de fermés et $X = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$. Alors $X^c = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F^c$. Ainsi, X^c est un ouvert tant que réunion quelconque d'ouverts. On a montré que X est un fermé. ■

Théorème 23 : Fermeture et Produit Cartésien :

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, N_1), \cdots, (E_p, N_p)$ p espaces vectoriels normés. Munissons $E_1 \times \cdots \times E_p$ de la norme produit φ.

Si $F_1, \cdots, F_p$ sont des fermés respectifs de $E_1, \cdots, E_p$, alors $F_1 \times \cdots \times F_p$ est un fermé de $E_1 \times \cdots \times E_p$.

Démonstration. Soit $(x_n) = \left(\left(x_n^{(1)}, \cdots, x_n^{(p)}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}} \in \left(\prod_{i=1}^{p} F_i\right)^{\mathbb{N}}$. Supposons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Alors $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\left(x_n^{(i)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans (E_i, N_i) disons vers $\ell^{(i)}$. Puisque pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\left(x_n^{(i)}\right)_{n \in \mathbb{N}} \in F_i^{\mathbb{N}}$ et F_i est fermé, alors $\ell^{(i)} \in F_i$ puis

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \left(\ell^{(1)}, \cdots, \ell^{(p)}\right) \in F_1 \times \cdots \times F_p.$$

Ceci montre que $F_1 \times \cdots \times F_p$ est un fermé. ■

Théorème 24 : Propriétés de l'Intérieur :

Soient $A, B \subset E$.

• $\text{Int}(A) \subset A$.
• Si A est un ouvert, alors $\text{Int}(A) = A$.
• Si $A \subset B$, alors $\text{Int}(A) \subset \text{Int}(B)$.

Démonstration. • Le résultat est clair si $\text{Int}(A)$ est vide. Supposons le contraire. Soit $x \in \text{Int}(A)$. Alors $\exists r > 0/ \quad B(x, r) \subset A$. En particulier, $x \in B(x, r) \subset A$. Donc $x \in A$.

• Supposons que A est un ouvert. Si $A = \varnothing$, rien à montrer. Supposons que A est non vide. Soit $x \in A$. Alors $\exists r > 0/ \quad B(x, r) \subset A$. Mais ceci montre que $x \in \text{Int}(A)$ donc $A \subset \text{Int}(A)$ puis l'égalité.

• Si l'un de $\text{Int}(A)$ ou $\text{Int}(B)$ est vide, la propriété est évidente. Supposons qu'aucun n'est vide. Soit $x \in \text{Int}(A)$. Donc $\exists r > 0/ \quad B(x, r) \subset A \subset B$. Donc $x \in \text{Int}(B)$. On a montré l'inclusion. ■

Théorème 25 : Caractérisation de l'Intérieur :

Soit $A \subset E$.

$\text{Int}(A)$ est le plus grand ouvert de E (au sens de l'inclusion) contenu dans A.

Démonstration. La propriété est immédiate si $A = \varnothing$. Supposons le contraire.

D'abord, $\text{Int}(A)$ est un ouvert contenu dans A; soit $x \in \text{Int}(A)$. Alors $\exists r > 0/ \quad B(x, r) \subset A$ donc $\text{Int}(B(x, r)) \subset \text{Int}(A)$. Mais $B(x, r)$ est ouvert, donc $\exists r > 0/ \quad B(x, r) \subset \text{Int}(A)$. On a montré que $\text{Int}(A)$ est un ouvert et, de plus, $\text{Int}(A) \subset A$ d'après le dernier Théorème.

Soit B un ouvert dans A. Montrons que $B \subset \text{Int}(A)$. Mais $B \subset A$, donc $\text{Int}(B) \subset \text{Int}(A)$ et par ouverture de B, on obtient $\text{Int}(B) = B$, puis l'inclusion désiriée. La propriété est établie. ■

Théorème 26 : Propriétés de l'Adhérence :

Soient $A \subset E$.

- $A \subset \mathrm{Adh}(A)$.
- Si A est fermé, alors $A = \mathrm{Adh}(A)$.
- $\mathrm{Adh}(A)^c = \mathrm{Int}\,(A^c)$.
- $\mathrm{Adh}\,(A^c) = \mathrm{Int}\,(A)^c$.

Démonstration. • Si $A = \varnothing$, c'est immédiat. Sinon, soit $x \in A$. Soit $r > 0$. Alors $x \in A \cap B(x, r)$ et en particulier $A \cap B(x, r) \neq \varnothing$, donc $x \in \mathrm{Adh}(A)$. L'inclusion est établie.

• Supposons que A est fermé. Si A est vide, c'est immédiat. Sinon, soit $x \in \mathrm{Adh}(A)$. Alors $\forall r > 0, \quad B(x, r) \cap A \neq \varnothing$. En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in A / \quad x_n \in B\left(x, \frac{1}{n+1}\right).$$

Ainsi, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers x est qui est à éléments dans A qui est fermé. Ainsi, $x \in A$ puis $\mathrm{Adh}(A) \subset A$ ou encore $\mathrm{Adh}(A) = A$.

• Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Adh}(A)^c &\Longleftrightarrow \exists r > 0 / \quad B(x, r) \cap A = \varnothing \\ &\Longleftrightarrow \exists r > 0 / \quad B(x, r) \subset A^c \\ &\Longleftrightarrow x \in \mathrm{Int}\,(A^c)\,. \end{aligned}$$

L'égalité est démontrée.

• Maintenant, $(\mathrm{Adh}\,(A^c))^c = \mathrm{Int}\,\left((A^c)^c\right) = \mathrm{Int}(A)$ d'après le dernier point. On obtient l'égalité par passage au complémentaire. ■

Théorème 27 : Caractérisation de l'Adhérence :

Soit $A \subset E$.

$\mathrm{Adh}(A)$ est le plus petit fermé de E (au sens de l'inclusion) contenant dans A.

Démonstration. Encore une fois, le cas où A est vide est trivial. Supposons le contraire. $\mathrm{Adh}(A)$ est un fermé qui contient A ; déjà $A \subset \mathrm{Adh}(A)$ et $\mathrm{Adh}(A)^c = \mathrm{Int}\,(A^c)$ est un ouvert, donc $\mathrm{Adh}(A)$ est fermé. Maintenant, soit F un fermé tel que $A \subset F$. Donc $F^c \subset A^c$ puis $\underbrace{\mathrm{Int}\,(F^c) = F^c}_{F^c \text{ est ouvert}} \subset \mathrm{Int}\,(A^c) = \mathrm{Adh}(A)^c$. Ainsi, $\mathrm{Adh}(A) \subset F$. Ceci montre la propriété. ■

Théorème 28 : Caractérisation Séquentielle de l'Adhérence :

Soit A une partie non vide de E.

x est adhérant à A si et seulement si il existe une suite à valeurs dans A qui converge vers x. Autrement dit,

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} / \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = x.$$

Démonstration. Soit $x \in E$.

$\Longrightarrow$) Supposons que $x \in \overline{A}$. Alors $\forall \varepsilon > 0, \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in A / \quad x_n \in B\left(x, \frac{1}{n+1}\right).$$

Ainsi, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ et tend vers x.

$\Longleftarrow$) Supposons qu'il existe une suite de terme général x_n à termes dans A et qui tend vers x. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel $u_n \in B(x, \varepsilon)$. Ainsi, $u_N \in A \cap B(x, \varepsilon)$ et en particulier, $A \cap B(x, \varepsilon) \neq \varnothing$. La caractérisation est étbalie. ■

Théorème 29 : Ouvert Relatif :

Soit $A \subset E$. Soit $O_A \subset A$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- O_A est un ouvert relatif de A.
- $\forall x \in O_A, \exists r > 0/ \quad A \cap B(x,r) \subset O_A$.
- Il existe un ouvert O de E tel que $O_A = O \cap A$.

Démonstration. $\Longrightarrow$) Supposons que $\forall x \in O_A, \exists r_x > 0/ \quad A \cap B(x, r_x) \subset O_A$. Posons $O = \bigcup\limits_{x \in O_A} B(x, r_x)$. Alors O est un ouvert de E et $O_A = A \cap O$ car $O_A \subset O$ et $O_A \subset A$ donc $O_A \subset O \cap A$, puis :

$$O \cap A = \left(\bigcup_{x \in O_A} B(x, r_x) \right) \cap A = \left(\bigcup_{x \in O_A} B(x, r_x) \cap A \right) \subset \left(\bigcup_{x \in O_A} O_A \right) = O_A.$$

$\Longleftarrow$) Supposons qu'il existe un ouvert O de E tel que $O_A = O \cap A$. Soit $x \in O_A$. Alors $x \in O$ et $x \in A$. Ainsi, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset O$. Donc $B(x,r) \cap A \subset O \cap A = O_A$. La propriété est démontrée. ■

Théorème 30 : Fermé Relatif :

Soit $A \subset E$. Soit $F_A \subset A$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- F_A est un fermé relatif de A.
- $A \setminus F_A$ est un ouvert relatif dans A.
- Il existe un fermé F de E tel que $F_A = F \cap A$.

Démonstration. $\Longrightarrow$) Supposons que $O_A = A \setminus F_A$ est un ouvert relatif dans A. Alors $F_A = A \cap O_A^c$. Maintenant, il existe un ouvert O de E tel que $O_A = O \cap A$. Alors

$$F_A = A \cap (O \cap A)^c = A \cap (A^c \cup O^c) = (A \cap A^c) \cup (A \cap O^c) = A \cap O^c.$$

Ainsi, O^c est est fermé (car est le complémentaire d'un ouvert) et, finalement, F_A est l'intersection de A et un fermé de E.

$\Longleftarrow$) Réciproquement, supposons qu'il existe un fermé F de E tel que $F_A = A \cap F$. Alors,

$$F_A = A \cap (F^c)^c = A \cap \left((F^c)^c \cup A^c\right) = A \cap (F^c \cap A)^c = A \setminus (F^c \cap A).$$

Ainsi, $O_A := F^c \cap A$ est un ouvert relatif de A. Ceci montre la propriété. ■

Théorème 31 : Caractérisation Séquentielle d'un Fermé Relatif :

Soient A une partie de E et $F \subset A$.

F est un fermé relatif si et seuelement si pour toute suite à éléments dans F, si elle converge vers ℓ **dans** A, alors $\ell \in F$.

Démonstration. $\Longrightarrow$) Supposons que F est un fermé relatif de A. Soit F_E un fermé de E tel que $F = F_E \cap A$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à éléments dans F qui converge vers $\ell \in A$. Ainsi, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est en particulier à éléments dans F_E. Donc $\ell \in F_E$ puis $\ell \in F_E \cap A = F$. La propriété est démontrée.

$\Longleftarrow$) Supposons que F n'est pas un fermé relatif de A. Alors $A \setminus F$ n'est pas un ouvert relatif de A. Ainsi,

$$\exists x \in A \setminus F / \forall \varepsilon > 0, \quad A \cap B(x, \varepsilon) \not\subset A \setminus F.$$

Ainsi, x est fixe et

$$\forall \varepsilon > 0, \quad A \cap B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus F)^c \neq \varnothing.$$

Mais $A \cap B(x,\varepsilon) \cap (A \setminus F)^c = A \cap B(x,\varepsilon) \cap (A \cap F^c)^c = A \cap B(x,\varepsilon) \cap (A^c \cup F) = A \cap B(x,\varepsilon) \cap F = F \cap B(x,\varepsilon)$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in F/ \quad x_n \in B\left(x, \frac{1}{n+1}\right).$$

Ainsi, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans F et tend vers $x \in A \setminus F$. Ceci achève la démonstration. ■

Dorénavant, (E, N) et (F, N') sont deux espaces vectoriels normés, $A \subset E$ et $f : A \longrightarrow F$.

THÉORÈME 32 : CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DE LA LIMITE D'UNE FONCTION :

Soit a un point adhérant à A.

La fonction f tend vers ℓ lorsque x tend vers a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A convergente vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et tend vers ℓ. Autrement dit,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \left(\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = a \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell\right).$$

Démonstration. $\Longrightarrow$) Supposons que f tend vers ℓ lorsque x tend vers a. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui tend vers a. Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in A$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que si $N(x-a) < \delta$, alors $N'(f(x)-\ell) < \varepsilon$.

Idem, il existe un rang N tel que si $n \geq N$, alors $N(x_n - a) < \delta$. Mais alors $\forall n \geq N, \quad N(x_n - a) < \delta \Longrightarrow N'(f(x_n) - \ell) < \varepsilon$. On a montré que la suite du terme général $f(x_n)$ converge et, de plus, tend vers ℓ.

$\Longleftarrow$) Démontrons la réciproque par contraposition. Supposons que $f(x)$ ne tend pas vers ℓ quand x tend vers a. Donc

$$\exists \varepsilon_0 > 0 / \forall \delta > 0, \exists x \in A / \quad N(x-a) < \delta \text{ et } N'(f(x)-\ell) \geq \varepsilon_0 \quad (*).$$

Construisons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments dans A qui converge vers a bien que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers ℓ.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La proposition $(*)$ fournit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in A / \quad N(x_n - a) < \frac{1}{n+1} \text{ et } N'(f(x_n) - \ell) \geq \varepsilon_0.$$

La suite du terme général est à valeurs dans A et tend vers a, bien que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers ℓ. L'équivalence est établie. ∎

THÉORÈME 33 : UNICITÉ DE LA LIMITE D'UNE FONCTIONS :

Si f admet une limite en un point, alors celle-ci est unique.

Démonstration. Supposons qu'il existe deux vecteurs ℓ_1 et ℓ_2 vers lesquels f tend lorsque x tend vers a. Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à éléments dans A qui tend vers a. Alors $\ell_1 = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell_2$ et c'est fini par unicité de la limite d'une suite. ∎

THÉORÈME 34 : CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DE LIMITE EN $\pm\infty$:

Supposons que $E = \mathbb{R}$.

• Supposons que A est non minorée. f tend vers ℓ quand x tend vers $-\infty$ si et seuelement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments dans A qui tend vers $-\infty$, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

• Supposons que A est non majorée. f tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ si et seuelement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments dans A qui tend vers $+\infty$, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

Démonstration. La construction est analogue à celle du THÉORÈME 32. ∎

THÉORÈME 35 : LIMITE DE FONCTION SUR UN ESPACE PRODUIT :

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \cdots, E_p$ p espaces vectoriels normés. Supposons que $f : \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & \prod_{k=1}^{p} E_k \\ x & \longmapsto & (f_1(x), \cdots, f_p(x)) \end{array}$.

f admet une limite $\ell = (\ell_1, \cdots, \ell_p) \in \prod_{k=1}^{p} E_k$ en a si et seuelement si $\forall k \in [\![1, p]\!], \quad f_k$ admet une limite en a et $\lim_{x\to a} f_k(x) = \ell_k$.

Démonstration. On utilisera la caractèrisation séquentielle de la limite d'une fonction et le THÉORÈME 15. ■

THÉORÈME 36 : LINÉARITÉ DE LA LIMITE :

Soient $f_1, f_2 : A \longrightarrow F$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

Si $f_1 \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $f_2 \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_2$, alors

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2.$$

Démonstration. On utilise la caractèrisation séquentielle de la convergence. ■

THÉORÈME 37 : LINÉARITÉ DE LA LIMITE :

Soient $f : A \longrightarrow F$ et $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{K}$.

Si $f \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ et $\varphi \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda$, alors

$$\varphi f \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda \ell$$

où $\varphi f : \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \varphi(x) f(x) \end{array}$.

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui tend vers a. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \|\varphi(x_n) f(x_n) - \lambda \ell\| &= \|\varphi(x_n) f(x_n) - \varphi(x_n) \ell + \varphi(x_n) \ell - \lambda \ell\| \\ &= \|\varphi(x_n)(f(x_n) - \ell) + \ell(\varphi(x_n) - \lambda)\| \\ &\leq |\varphi(x_n)| \|f(x_n) - \ell\| + |\ell| \|\varphi(x_n) - \lambda\|. \end{aligned}$$

$(\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée car elle est convergente. Ainsi, $\|\varphi(x_n) f(x_n) - \lambda \ell\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Ceci achève la démonstration. ■

THÉORÈME 38 : LIMITE ET QUOTIENT :

Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$.

Si $f \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ et $\ell \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f}$ est bien définie sur un voisinage relatif de a et $\dfrac{1}{f} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\ell}$.

Démonstration. $\dfrac{1}{f}$ est bien définie sur au moins un voisinage relatif de a, car

$$\exists \eta > 0 / \forall x \in A \cap B(a, \eta), \quad |f(x) - \ell| < \frac{|\ell|}{2};$$

ainsi, $\forall x \in A \cap B(a, \eta), \quad |\ell| - |f(x)| \leq ||\ell| - |f(x)|| \leq |\ell - f(x)| < \dfrac{|\ell|}{2}$ puis $|f(x)| > \dfrac{\ell}{2}$ et en particulier $f(x) \neq 0$.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à éléments dans A qui tend vers a. A partir d'un certain rang, $\left(\dfrac{1}{f(x_n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie puis

$$\left|\frac{1}{f(x_n)} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|\ell - f(x_n)|}{|\ell| |f(x_n)|} < \frac{1}{|\ell| \frac{|\ell|}{2}} |f(x_n) - \ell| = \frac{2}{|\ell|^2} |f(x_n) - \ell| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où le résultat. ■

THÉORÈME 39 : LE THÉORÈME DE COMPOSITION DE LIMITES :

Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$, puis $f : A \longrightarrow F$ et $g : B \longrightarrow G$ tels que $f(A) \subset B$.

Si $f \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$ et $g \underset{y \to b}{\longrightarrow} \ell$, alors $g \circ f \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tendant vers a. $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$ et tend vers b. En particulier, $(g(f(x_n)))_{n\in\mathbb{N}} = ((g\circ f)(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ. Le théorème est établi. ■

Théorème 40 : Les Théorèmes Généraux de Continuité :

- La combinaison linéaire de fonctions continue est continue.
- Le produit d'une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{K}$ avec une fonction continue est continue.
- La composition de fonctions continue est continue.
- Si une fonction est à valeurs dans $\mathbb{K}$ et ne s'annule pas, alors son inverse est continue.

Démonstration. Résultats immédiats des théorèmes généraux sur les limites. ■

Théorème 41 : Fonction Lipschitzienne et Continuité :

Toute fonction lipschitzienne est continue.

Démonstration. Soit $k \geq 0$ tel que $\forall (x,y) \in A^2, \quad N'(f(x)-f(y)) \leq kN(x-y)$. Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in A$. Soit $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k+1}$. Alors $\eta > 0$ et

$$\begin{aligned}\forall y \in A, \quad y \in B(x,\eta) &\Longrightarrow N(x-y) < \frac{\varepsilon}{k+1}\\ &\Longrightarrow kN(x-y) \leq (k+1)N(x-y) < \varepsilon\\ &\Longrightarrow N'(f(x)-f(y)) < \varepsilon\\ &\Longrightarrow f(y) \in B(f(x),\varepsilon).\end{aligned}$$

Ceci montre que f est continue en tout point $x \in A$. ■

Théorème 42 : Caractérisation de la Continuité par Préservation de l'Ouverture/Fermeture en passant à l'Image Réciproque :

- f est continue sur A si et seuelement l'image réciproque de tout fermé de F par f est un fermé relatif de A.
- f est continue sur A si et seuelement l'image réciproque de tout ouvert de F par f est un ouvert relatif de A.

Démonstration. Supposons que f continue sur A. Soit V un fermé de F. Si $f^{-1}(V) = \varnothing$, c'est fini. Supposons le contraire. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $f^{-1}(V)$ qui converge dans A disons vers x. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists y_n \in V / \quad f(x_n) = y_n.$$

Puisque $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ et f est continue, alors $f(x_n) = y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$. Par fermeture de V, $f(x) \in V$ ou encore $x \in f^{-1}(V)$. On a montré que $f^{-1}(V)$ est un fermé relatif de A. On a montré que

$$f \text{ est continue sur } A \Longrightarrow \text{l'image réciproque de tout fermé par } f \text{ est un fermé relatif de } A \quad (*).$$

Supposons que l'image réciproque de tout fermé par f est un fermé relatif de A. Soit O un ouvert de F. Alors $F\setminus O$ est un fermé de F. Donc $f^{-1}(F\setminus O) = A\setminus f^{-1}(O)$ est un fermé relatif de A, ou encore $f^{-1}(O)$ est un ouvert relatif de A. On a montré que

$$\text{l'image réciproque de tout fermé est un fermé relatif} \Longrightarrow \text{l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert relatif} \quad (**).$$

Supposons que l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert relatif. Montrons la continuité. Soient $y \in A$ et $\varepsilon > 0$. $B(f(y),\varepsilon)$ est un ouvert de F, donc $f^{-1}(B(f(y),\varepsilon))$ est un ouvert relatif de A. Puisque $y \in f^{-1}(B(f(y),\varepsilon))$ alors il existe $\eta > 0$ tel que $B(y,\eta)\cap A \subset f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$. Ceci montre la continuité de f en tout point $y \in A$. ■

Théorème 43 : Caractérisation de la Continuité d'une Application Linéaire :

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

- u est continue si et seuelement si il existe un réel positif C tel que $\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leq C\|x\|$.
- u est continue si et seuelement si elle est bornée sur la boule unité fermée.

Démonstration. • $\Longrightarrow$) Supposons la continuité. L'inégalité est évidente pour $x = 0$. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. La continuité en 0 donne

$$\exists \eta > 0 / \forall y \in E, \quad \|y\| < \eta \Longrightarrow \|u(y)\| < \frac{1}{2}.$$

Mais, $\left\| \frac{\eta}{2\|x\|} x \right\| = \frac{\eta}{2} < \eta$. Donc $\left\| u\left(\frac{\eta}{2\|x\|} x\right) \right\| = \frac{\eta}{2\|x\|} \|u(x)\| < \frac{1}{2}$ ou encore $\|u(x)\| \leq \frac{1}{\eta} \|x\|$. Ainsi, $C = \frac{1}{\eta}$ convient.

$\Longleftarrow$) Réciproquement, supposons que $\exists C \geq 0 / \forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leq C\|x\|$. Soient $x, y \in E$. Alors

$$\|u(x) - u(y)\| = \|u(x - y)\| \leq C\|x - y\|.$$

Ainsi, u est C-lipschitzienne, ce qui fournit la continuité.

• $\Longrightarrow$) Supposons que $\exists C \geq 0 / \forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leq C\|x\|$. Soit $x \in B_f(0, 1)$. Alors $\|u(x)\| \leq C\|x\| \leq C$ et l'implication est établie.

$\Longleftarrow$) Supposons que u est bornée sur la boule unité fermée. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Alors

$$\exists C \geq 0 / \quad \left\| u\left(\frac{1}{\|x\|} x\right) \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|u(x)\| \leq C.$$

Ceci fournit $\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad \|u(x)\| \leq C\|x\|$. Cette inégalité reste vraie pour $x = 0$. ■

Théorème 44 : Application Linéaire en Dimension Finie :

Toute application linéaire sur un espace de dimension finie est continue.

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Supposons que E est de dimension finie p de base disons $(e_1, \cdots, e_p)$. Puisque les normes sur E seront équivalentes, peu importe la norme choisie pour montrer la continuité. Montrons alors que u est continue où E est muni de la norme infinie. Maintenant, soit $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \in E$. Alors,

$$\begin{aligned}
\|u(x)\| &= \left\| u\left(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i\right) \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{p} x_i u(e_i) \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{p} |x_i| \|u(e_i)\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{p} \|x\|_\infty \|u(e_i)\| \\
&= \|x\|_\infty \sum_{i=1}^{p} \|u(e_i)\|.
\end{aligned}$$

Avec $C = \sum_{i=1}^{p} \|u(e_i)\|$, on prouve la caractèrisation, ce qu'il fallait démontrer. ■

Théorème 45 : Norme Subordonnée d'une Application Linéaire Continue :

Soit $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$.

L'ensemble $\{C \geq 0, \quad \forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leq C\|x\|\}$ admet un minimum dit norme subordonnée de u et est notée $|||u|||$. De plus,

$$\begin{aligned}
|||u||| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \\
&= \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\| \\
&= \sup_{\|x\| = 1} \|u(x)\|.
\end{aligned}$$

Démonstration. u est continue. Ainsi, $\exists C \geq 0 / \forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leq C\|x\|$. Ceci donne que $\left\{\dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}, \quad x \in E \setminus \{0\}\right\}$ est une partie majorée et non vide de $\mathbb{R}$, justifiant l'existance de $\sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$.

Alternativement, u est bornée sur la boule unité fermé et en particulier sur la sphère unité, fournissant l'existance de $\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|$ et de $\sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\|$.

- Soit $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$. Si $x = 0$, alors il est immédiat que $\|u(x)\| = 0 \leq \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$. Sinon,

$$\|u(x)\| \leq \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$

Ainsi, $\forall x \in B_f(0,1), \quad \|u(x)\| \leq \sup\limits_{y \neq 0} \dfrac{\|u(y)\|}{\|y\|}$ puis, par définition de la borne supérieure,

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\| \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$

Inversement, soit $x \neq 0$. Alors $\dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \left\|u\left(\dfrac{1}{\|x\|}x\right)\right\| \leq \sup\limits_{y \in B_f(0,1)} \|u(y)\|$. Donc

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|.$$

On a montré la première égalité.

- Déjà, $S(0,1) \subset B_f(0,1)$, donc $\sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\| \leq \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|$. Soit maintenant $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$. Si $\|x\| = 0$, il sera immédiat que $\|u(x)\| = 0 \leq \sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\|$. Sinon,

$$\begin{aligned}
\|u(x)\| &= \left\|u\left(\frac{\|x\|}{\|x\|}x\right)\right\| \\
&= \|x\| \left\|u\left(\frac{1}{\|x\|}x\right)\right\| \\
&\leq \underbrace{\|x\|}_{\leq 1} \sup_{\|y\|=1} \|u(y)\| \\
&\leq \sup_{\|y\|=1} \|u(y)\|.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x \in B_f(0,1), \quad \|u(x)\| \leq \sup\limits_{\|y\|=1} \|u(y)\|$ puis $\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\|$. Ceci fournit la deuxième égalité.

- Finalement, montrons que $M := \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \min \mathscr{A}$ où $\mathscr{A} = \{C \geq 0, \quad \forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leq C\|x\|\}$. Pour cela, on va montrer que $M \in \mathscr{A}$ et que $\forall C \in \mathscr{A}, \quad M \leq C$.

Soit $x \in E$. Il est immédiat que $\|u(x)\| \leq M\|x\|$ pour $x = 0$. Dorénavant, $x \neq 0$. Alors $\dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leq \sup\limits_{y \neq 0} \dfrac{\|u(y)\|}{\|y\|} = M$, d'où $\|u(x)\| \leq M\|x\|$. On a montré que $M \in \mathscr{A}$.

Maintenant, soit $C \in \mathscr{A}$. Alors $\forall x \neq 0, \quad \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leq C$. Ainsi, par définition de la borne supérieure, $M = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leq C$. La propriété est (*finalement*) établie. ∎

Théorème 46 : Norme Subordonnée :

Soient $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $x \in E$.

Alors $\|u(x)\| \leq |||u||| \cdot \|x\|$.

Démonstration. Par définition. ∎

Théorème 47 : Sous-Multiplicativité :

Soient $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}_c(F, G)$. Alors
$$|||v \circ u||| \leq |||u||| \cdot |||v|||.$$

Démonstration. Soit $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$. Alors
$$\|(v \circ u)(x)\| = \|v(u(x))\| \leq |||v||| \cdot \|u(x)\| \leq |||v||| \cdot |||u||| \cdot \|x\| = |||v||| \cdot |||u|||.$$
Ainsi, $\sup\limits_{\|x\|=1} \|(v \circ u)(x)\| \leq |||v||| \cdot |||u|||$. Mais $\sup\limits_{\|x\|=1} \|(v \circ u)(x)\| = |||v \circ u|||$ ce qui achève la démonstration. ∎

Théorème 48 : Caractérisation de la continuité d'une Application Multilinéaire :

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \cdots, E_p$ p est espaces vectoriels normés. Munissons l'espace $\prod\limits_{k=1}^{p} E_k$ de sa norme produit. Soit F un espace vectoriel normé.

Soit $\varphi : E_1 \times \cdots \times E_p \longrightarrow F$ une application multilinéaire. Alors φ est continue si et seuelement si
$$\exists C \geq 0 / \forall (x_1, \cdots, x_p) \in \prod_{k=1}^{p} E_k, \quad \|\varphi(x_1, \cdots, x_p)\| \leq C \prod_{k=1}^{p} \|x_k\|.$$

Démonstration. $\Longrightarrow$) Supposons la continuité. Soit $(x_k)_{1 \leq k \leq p} \in \prod\limits_{k=1}^{p} E_k$ Si l'un des x_k est nul, la propriété est vérifiée pour n'importe quel $C \geq 0$. Supposons le contraire.

Il existe alors $\eta > 0$ tel que pour tout $(y_k)_{1 \leq k \leq p} \in \prod\limits_{k=1}^{p} E_k$, si $\|(y_1, \cdots, y_p)\| < \eta$, alors $\|\varphi(y_1, \cdots, y_p)\| < 1$. Or,
$$\left\| \left(\frac{\eta}{2\|x_1\|} x_1, \cdots, \frac{\eta}{2\|x_p\|} x_p \right) \right\| = \frac{\eta}{2} < \eta.$$
Donc, $\left\| \varphi\left(\frac{\eta}{2\|x_1\|} x_1, \cdots, \frac{\eta}{2\|x_p\|} x_p \right) \right\| < 1$. Or
$$\begin{aligned}\left\| \varphi\left(\frac{\eta}{2\|x_1\|} x_1, \cdots, \frac{\eta}{2\|x_p\|} x_p \right) \right\| &= \left\| \frac{\eta}{2\|x_1\|} \times \cdots \times \frac{\eta}{2\|x_p\|} \varphi(x_1, \cdots, x_p) \right\| \\ &= \frac{\eta^p}{2^p} \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{p} \|x_k\|} \|\varphi(x_1, \cdots, x_p)\|.\end{aligned}$$
Ainsi,
$$\|\varphi(x_1, \cdots, x_p)\| \leq \frac{2^p}{\eta^p} \prod_{k=1}^{p} \|x_k\|.$$
Donc $C = \dfrac{2^p}{\eta^p}$ convient.

$\Longleftarrow$) Supposons l'existance d'une constante C vérifiant telle inégalité.

Si $p = 2$, on est dans le cas d'une application bilinéaire. Soit $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}} \in (E_1 \times E_2)^{\mathbb{N}}$ convergente vers $(x, y) \in E_1 \times E_2$. Alors
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\varphi(x_n, y_n) - \varphi(x, y)\| &= \|\varphi(x_n, y_n) + \varphi(x_n, y) - \varphi(x_n, y) - \varphi(x, y)\| \\ &= \|\varphi(x_n, y_n - y) + \varphi(x_n - x, y)\| \\ &\leq \|\varphi(x_n, y_n - y)\| + \|\varphi(x_n - x, y)\| \\ &\leq C\|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + C\|x_n - x\| \cdot \|y\|\end{aligned}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ceci fournit la continuité de φ.

Le résultat général se démontre de façcon analogue ;

Soit $\left(x_1^{(n)},\cdots,x_p^{(n)}\right) \in \left(\prod_{k=1}^{p} E_k\right)^{\mathbb{N}}$ qui tend vers $(x_1,\cdots,x_p)$. Soit n un entier naturel. Pour conformité de notation, on notera $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)},\cdots,x_p^{(n)}\right)$ et $x = (x_1,\cdots,x_p)$. Alors

$$\begin{aligned}
\left\|\varphi\left(x^{(n)}\right)-\varphi(x)\right\| &= \left\|\varphi\left(x^{(n)}\right)-\varphi\left(x_1^{(n)},\cdots,x_{p-1}^{(n)},x_p\right)+\varphi\left(x_1^{(n)},\cdots,x_{p-1}^{(n)},x_p\right)-\varphi(x)\right\| \\
&= \left\|\varphi\left(x_1^{(n)},\cdots,x_{p-1}^{(n)},x_p^{(n)}-x_p\right)+\varphi\left(x_1^{(n)},\cdots,x_{p-1}^{(n)},x_p\right)-\varphi(x)\right\| \\
&\leq \left\|\varphi\left(x_1^{(n)},\cdots,x_{p-1}^{(n)},x_p^{(n)}-x_p\right)\right\|+\left\|\varphi\left(x_1^{(n)}-x_1,\cdots,x_{p-1}^{(n)}-x_p,x_p\right)\right\|.
\end{aligned}$$

Maintenant, par hypothèse, il existe $C \geq 0$ tel que

$$\left\|\varphi\left(x_1^{(n)},\cdots,x_{p-1}^{(n)},x_p^{(n)}-x_p\right)\right\| \leq C\left\|x_p^{(n)}-x_p\right\|\prod_{k=1}^{p-1}\left\|x_k^{(n)}\right\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Idem,

$$\left\|\varphi\left(x_1^{(n)}-x_1,\cdots,x_{p-1}^{(n)}-x_p,x_p\right)\right\| \leq C\left\|x_p\right\|\prod_{k=1}^{p-1}\left\|x_k^{(n)}-x_k\right\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ceci achève la démonstration. ■

Théorème 49 : Continuité des Applications Multilinéaires end Dimension Finie :

Soit φ une application bilinéaire sur un produit d'espaces tous de dimensions finies.

Alors φ est continue.

Démonstration. Gardons les mêmes notation que la démonstration précédante. Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, fixons $n_k = \dim E_k$ et $\mathscr{B}_k = \left(e_1^{(k)},\cdots,e_{n_k}^{(k)}\right)$ une base de E_k. Soit $x = (x_1,\cdots,x_p) \in E_1\times\cdots\times E_p$ puis $\forall k \in [\![1,p]\!],\quad x_k = \sum_{i=1}^{n_k} x_i^{(k)}e_i^{(k)}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\|\varphi(x_1,\cdots,x_p)\| &= \left\|\varphi\left(\sum_{i_1=1}^{n_1}x_{i_1}^{(1)}e_{i_1}^{(1)},\cdots,\sum_{i_p=1}^{n_p}x_{i_p}^{(p)}e_{i_p}^{(p)}\right)\right\| \\
&= \left\|\sum_{i_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{i_p=1}^{n_p}x_{i_1}^{(1)}\cdots x_{i_p}^{(p)}\varphi\left(e_{i_1}^{(1)},\cdots,e_{i_p}^{(p)}\right)\right\| \\
&= \left\|\sum_{(i_1,\cdots,i_p)\in\prod_{k=1}^{n}[\![1,n_k]\!]}x_{i_1}^{(1)}\cdots x_{i_p}^{(p)}\varphi\left(e_{i_1}^{(1)},\cdots,e_{i_p}^{(p)}\right)\right\| \\
&\leq \sum_{(i_1,\cdots,i_p)\in\prod_{k=1}^{n}[\![1,n_k]\!]}\left|x_{i_1}^{(1)}\right|\cdots\left|x_{i_p}^{(p)}\right|\left\|\varphi\left(e_{i_1}^{(1)},\cdots,e_{i_p}^{(p)}\right)\right\| \\
&\leq \sum_{(i_1,\cdots,i_p)\in\prod_{k=1}^{n}[\![1,n_k]\!]}\|x_1\|_\infty\cdots\|x_p\|_\infty\left\|\varphi\left(e_{i_1}^{(1)},\cdots,e_{i_p}^{(p)}\right)\right\| \\
&= \underbrace{\left(\sum_{(i_1,\cdots,i_p)\in\prod_{k=1}^{n}[\![1,n_k]\!]}\left\|\varphi\left(e_{i_1}^{(1)},\cdots,e_{i_p}^{(p)}\right)\right\|\right)}_{C}\|x_1\|_\infty\cdots\|x_p\|_\infty.
\end{aligned}$$

La caractèrisation est établie. ■

Théorème 50 : Continuité des Fonctions Polynomiales :

Toute fonction polynomiale est continue.

Démonstration. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $f : x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \longmapsto \sum_{(k_1,\cdots,k_n)\in\mathbb{N}^n} \lambda_{k_1,\cdots,k_n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i}$ polynomiale. Il y'en a plusieurs approches.

En utilisant les théorèmes généraux : pour tout $(k_1, \cdots, k_n) \in \mathbb{N}^n$, l'application

$$\varphi_{k_1,\cdots,k_n} : x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \longmapsto x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$$

est continue ; l'application $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \longmapsto x_i$ est continue car linéaire (projection sur la droite vectorielle $\mathbb{K}e_i$) sur un espace de dimension finie. Ainsi, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \longmapsto x_i^{k_i}$ est le produit (usuel) de k_i forme linéaires continues donc est continue. Ce même dernier argument s'applique pour établir la continuité de $\varphi_{k_1,\cdots,k_n}$. Ainsi, f est une combinaison linéaire finie des $\varphi_{k_1,\cdots,k_n}$ (car les $\lambda_{k_1,\cdots,k_n}$ s'annulent le moment où chaque k_i dépasse un certain rang) donc est continue.

En utilisant la caractèrisation séquentielle : claire. ∎

Théorème 51 : Compacité et Valeurs d'Adhérence :

Soit K un compact et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}\in K^{\mathbb{N}}}$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seuelement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Démonstration. On sait déjà que si une suite converge, alors elle admet une unique valeur d'adhérence. Etablissons la réciproque.

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence ℓ. Supposons par absurde que ℓ n'en est pas limite. Ainsi,

$$\exists \varepsilon_0 > 0 / \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N / \quad \|u_n - \ell\| \geq \varepsilon_0.$$

En particulier, $\exists n \geq 0 / \quad \|u_n - \ell\| \geq \varepsilon_0$. Notons $n = \varphi(0)$. Mais alors $\exists n' \geq \varphi(0) + 1 / \quad \|u_{n'} - \ell\| \geq \varepsilon_0$. Notons $n' = \varphi(1)$. On aura $\varphi(1) > \varphi(0)$. Par récurrence, on poura alors exhiber une extractrice φ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\|u_{\varphi(n)} - \ell\right\| \geq \varepsilon_0$. Maintenant, $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans le compact K, donc admet une sous-suite $\left(u_{(\varphi\circ\psi)(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mais par hypothèse, il n'existe qu'une seule, à savoir ℓ. Donc $u_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ bien que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\|u_{\varphi(\psi(n))} - \ell\right\| \geq \varepsilon_0$. Ceci est absurde. On en déduit que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. ∎

Théorème 52 : Compacité, Fermeture et Bornitude :

Tout compact est fermé et borné.

Démonstration. Soit $K \subset E$ un compact. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ convergente vers ℓ. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente vers $\ell' \in K$. Par unicité de la valeur d'adhérence d'une suite convergente, $\ell = \ell' \in K$. Ceci montre que K est fermé.

Supposons qu'il n'est pas borné. Alors $\forall M \geq 0, \exists x \in K / \quad \|x\| > M$. En particulier, $\forall n \geq 0, \exists x_n \in K / \quad \|x_n\| > n$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, étant à valeurs dans K, admet une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente et en particulier bornée. Or, $\forall n \geq 0, \quad \left\|x_{\varphi(n)}\right\| > \varphi(n) \geq n$. Donc $\left\|x_{\varphi(n)}\right\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ contredisant son caractère borné. On a montré que K est borné. ∎

Théorème 53 : Compact au sens de Borel-Lesbegues et au sens de Bolzano-Weierstrass :

Tout BL-compact est BW-compact.

Démonstration. Soit K un BL-compact *ie.* pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ (I quelconque) telle que $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, il existe une sous-famille finie $J \subset I$ telle que $K \subset \bigcup_{i\in J} U_i$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$. Supposons que telle suite n'a pas de valeurs d'adhérence dans K. Ainsi,

$$\forall x \in K, \exists \varepsilon_x > 0/ \quad \mathrm{card}\left(\{n \in \mathbb{N}, \quad \|x_n - x\| < \varepsilon_x\}\right) < +\infty.$$

Ainsi, $K \subset \bigcup_{x\in K} B(x, \varepsilon_x)$. Par hypothèse, il existe donc un nombre fini d'éléments $x_1, \cdots, x_p \in K$ tels que

$$K \subset \bigcup_{1\leq i\leq p} B\left(x_i, \varepsilon_{x_i}\right).$$

Maintenant, le nombre d'indices n tels que $x_n \in K$ est infini, car la suite est dans K. Ceci implique qu'il existe $i_0 \in [\![1, p]\!]$ de sorte qu'il existe une infinité d'indices n tels que $x_n \in B\left(x_{i_0}, \varepsilon_{x_{i_0}}\right)$; dans le cas contraire, il n'existera qu'un nombre fini d'indices tels que $x_n \in B\left(x_i, \varepsilon_{x_i}\right)$ pour toutes les boules et par la suite, on n'aura qu'un nombre fini d'indices tels que $x_n \in K$. Ceci est absurde. On en déduit que K est comapact. ■

> THÉORÈME 54 : SOUS-PARTIES COMPACTES :
>
> Toute partie fermée d'un compact est compacte.

Démonstration. Soit K un compact et A une partie fermée de K. Si K ou A est vide, c'est fini. On suppose le contraire. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$. En particulier, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ et par compacité de K, il existe une extractrice φ et un vecteur ℓ tels que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $\ell \in K$. Maintenant, $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ et est convergente vers ℓ et, par fermeture de A, $\ell \in A$. Ainsi, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins un valeur d'adhérence dans A. Ceci montre que A est compact. ■

> THÉORÈME 55 : COMPACT PRODUIT :
>
> Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $E_1, \cdots, E_p$ p espaces vectoriels normés et $A_1, \cdots, A_p$ des sous-parties compactes respectives. Alors $\prod_{i=1}^{p} A_i$ est un compact de $\prod_{i=1}^{p} E_i$ muni de sa norme produit.

Démonstration. Si l'un des A_i est vide, le produit est vide et c'est fini. Démontrons le résultat pour le cas contraire par une récurrence simple sur p.

Si $p = 1$, rien à faire. Pour alléger "l'idée de la récurrence", traitons le cas $p = 2$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $A_1 \times A_2$. Ainsi, son terme général s'écrira $x_n = \left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}\right)$, où $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n^{(1)} \in A_1$ et $x_n^{(2)} \in A_2$. Par compacité de A_1, il existe une extractrice φ_1 et un vecteur $x^{(1)} \in A_1$ tels que $x^{(1)}_{\varphi_1(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x^{(1)}$. Maintenant, $\left(x^{(2)}_{\varphi_1(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in A_2^{\mathbb{N}}$. Puisque A_2 est compact, alors il existe une extractrice φ_2 et un vecteur $x^{(2)} \in A_2$ tels que $x^{(2)}_{(\varphi_1\circ\varphi_2)(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x^{(2)}$. Finalement, la suite du terme général $x_{(\varphi_1\circ\varphi_2)(n)} = \left(x^{(1)}_{(\varphi_1\circ\varphi_2)(n)}, x^{(2)}_{(\varphi_1\circ\varphi_2)(n)}\right)$ est extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et tend vers $\left(x^{(1)}, x^{(2)}\right) \in A_1 \times A_2$. Ceci montre que $A_1 \times A_2$ est un compact.

Soit $p \geq 2$. Supposons que $p-1$ produit de compact est un compact de l'espace produit.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left(x_n^{(1)}, \cdots, x_n^{(p)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\prod_{i=1}^{p} A_i\right)^{\mathbb{N}}$. En particulier, $\left(\left(x_n^{(1)}, \cdots, x_n^{(p-1)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\prod_{i=1}^{p-1} A_i\right)^{\mathbb{N}}$. Ainsi, il existe une extractrice φ et un vecteur $\left(x^{(1)}, \cdots, x^{(p-1)}\right) \in A_1 \times \cdots \times A_{p-1}$ tels que $\left(x^{(1)}_{\varphi(n)}, \cdots, x^{(p-1)}_{\varphi(n)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \left(x^{(1)}, \cdots, x^{(p-1)}\right)$ par hypothèse de récurrence. Maintenant, $\left(x^{(p)}_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in A_p^{\mathbb{N}}$ et par la suite, il existe une extractrice ψ et un vecteur $x^{(p)} \in A_p$ tels que $x^{(p)}_{(\varphi\circ\psi)(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x^{(p)}$. Dans tel cas, $x_{(\varphi\circ\psi)(n)} = \left(x^{(1)}_{(\varphi\circ\psi)(n)}, \cdots, x^{(p)}_{(\varphi\circ\psi)(n)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \left(x^{(1)}, \cdots, x^{(p)}\right) \in \prod_{i=1}^{p} A_i$ (convergence des suites en norme produit). Le résultat est établi par récurrence. ■

Théorème 56 : Continuité et Compacité :

L'image continue d'un compact est un compact.

Démonstration. Soient $f : E \longrightarrow F$ continue et K un compact de E. Si K est vide, $f(K) = \varnothing$ est comapct. Supposons le contraire. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (f(K))^{\mathbb{N}}$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in K / \quad f(x_n) = y_n.$$

Maintenant, il existe une extractrice φ et un vecteur $\ell \in K$ tels que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Ainsi, $y_{\varphi(n)} = f\left(x_{\varphi(n)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$ par continuité de f. De plus, $f(\ell) \in f(K)$, ce qui conclut la démonstration. ■

Théorème 57 : Condition Suffisante de la Continuité de la Réciproque d'une Fonction Bijective Continue :

Soit $f : K \longrightarrow L$ continue et bijective.

Si K est compact, alors f^{-1} est continue. Dit autrement, f est un homéomorphisme.

Démonstration. Supposons que K est compact. Montrons que f^{-1} est continue en établissant la caractèrisation séquentielle ; soit $y \in L$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^{\mathbb{N}}$ qui tend vers y. Montrons que $f^{-1}(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f^{-1}(y)$.

Montrons d'abord que la suite du terme général $f^{-1}(y_n)$ converge. Puisqu'elle est à valeurs dans K qui est compact, il suffit de montrer qu'elle admet une unique valeur d'adhérence. Soit alors φ un extractrice de sorte que $\left(f^{-1}\left(y_{\varphi(n)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, disons vers $\ell \in K$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $x_n \in K$ l'unique vecteur de K tel que $f(x_n) = y_n$. Ainsi, $f\left(x_{\varphi(n)}\right) = y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$. Mais d'autre part,

$$y_{\varphi(n)} = f\left(f^{-1}\left(y_{\varphi(n)}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$$

par continuité de f. Par unicité de limite, $y = f(\ell)$ ou encore, $\ell = f^{-1}(y)$. Ainsi, $\left(f^{-1}(y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence, à savoir $f^{-1}(y)$. Puisque la suite est à valeurs dans un compact, alors $f^{-1}(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f^{-1}(y)$. Ceci montre la continuité. ■

Théorème 58 : Image d'un Compact par Fonction à Valeurs dans $\mathbb{R}$:

Soient A un compact non vide et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

Alors f est bornée et atteint ses bornes *ie.* il existe $x_1, x_2 \in A$ tels que $f(x_1) = \min\limits_{x\in A} f(x)$ et $f(x_2) = \max\limits_{x\in A} f(x)$.

Démonstration. $f(A)$ est borné car compact tant qu'image continue d'un compact. Puisqu'il est de plus une partie non vide de $\mathbb{R}$, alors il admet des bornes supérieure et inférieure. Notons-les respectivement M et m.

M est limite d'une suite d'éléments de $f(A)$ en vertu de la caractèrisation séquentielle de la borne supérieure. Mais $f(A)$ est fermé car compact, donc $M \in f(A)$. Ceci prouve que M est atteint. Idem pour la borne inférieure. ■

Théorème 59 : Théorème de Heine :

Soit f continue sur un compact. Alors elle est uniformément continue.

Démonstration. Soit $f : K \longrightarrow F$ continue, où K est compact. Par absurde, supposons que f n'est pas uniformément continue. Alors

$$\exists \varepsilon > 0 / \forall \eta > 0, \exists (x,y) \in K^2 / \quad \|x - y\| < \eta \text{ et } \|f(x) - f(y)\| \geq \varepsilon.$$

ε est maintenant fixe. Il existe ainsi deux suites à valeurs dans K de termes généraux respectifs x_n et y_n de sorte que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|x_n - y_n\| < \frac{1}{n+1} \text{ et } \|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \varepsilon.$$

Déjà, $x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. De plus, on peut extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite que l'on notera $\ell \in K$. Maintenant, $y_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} - \left(x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - 0 = \ell$. Maintenant,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\|f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right\| \geq \varepsilon$$

et par passage à la limite (et continuité de f), on obtient

$$\|f(\ell) - f(\ell)\| = 0 \geq \varepsilon.$$

Ceci est absurde. On en déduit que f est uniformément continue. ■

Dorénavant, E est un espace vectoriel de dimension finie dont on fixe une base $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_p)$.

Théorème 60 : Théorème de Bolzano-Weierstrass en Norme Infinie :

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute suite bornée admet une sous-suite convergente pour la norme infinie (à priori, on ne sait pas si les normes sont équivalentes en dimension finie).

Démonstration. On fera la démonstration par récurrence sur p la dimension de l'espace.

Initialisation : si $p = 1$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée à valeurs dans $E = \text{Vect}\,(e_1)$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in \mathbb{K}/ \quad u_n = x_n e_1$$

et d'autre part, il existe $M \geq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u_n\| \leq M$. Maintenant,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|x_n e_1\| = |x_n|\,\|e_1\| \leq M.$$

Donc $|x_n| \leq \dfrac{M}{\|e_1\|}$ ($\|e_1\| > 0$ car $e_1 \neq 0$ tant que la famille (e_1) est libre). Ainsi, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique bornée, donc admet une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass établi dans le cas où $E = \mathbb{K}$. Ainsi, $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et l'initialisation est établie.

Hérédité : soit $p \geq 2$. Supposons que toute suite bornée dans un espace de dimension $p-1$ admet une sous-suite convergente pour la norme infinie. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée à valeurs dans $E = \text{Vect}\,(e_1, \cdots, e_p)$, disons par $M \geq 0$. Notons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{i=1}^{p} x_n^{(i)} e_i.$$

Notons aussi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite du terme général $v_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} x_n^{(i)} e_i$ de sorte que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n + x_n^{(p)} e_p$.

Maintenant,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|x_n^{(p)}\right| \leq \|u_n\|_\infty \leq M.$$

Donc il existe une extractrice φ et $\ell_p \in \mathbb{K}$ tels que $x_{\varphi(n)}^{(p)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_{p+1}$ puis $x_{\varphi(n)}^{(p)} e_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_p e_p$.

Maintenant, la suite $\left(v_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans l'espace $\text{Vect}\,(e_1, \cdots, e_{p-1})$ qui est de dimension $p-1$ et est bornée tant que différence de deux suites bornées. Par hypothèse de récurrence, il existe une extractrice ψ et $\ell \in \text{Vect}\,(e_1, \cdots, e_{p-1})$ tels que $v_{(\varphi\circ\psi)(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Finalement,

$$u_{(\varphi\circ\psi)(n)} = v_{(\varphi\circ\psi)(n)} + x_{(\varphi\circ\psi)(n)}^{(p)} e_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ell_p e_p.$$

Le résultat est établi par récurrence. ■

Théorème 61 : Théorème de Borel-Lesbegues en Norme Infinie :

En dimension finie, les compacts sont les parties fermées et bornées pour la norme infinie.

Démonstration. Un sens est déjà établi. Montrons qu'en dimension finie, si K est fermé borné (par la norme infinie), alors K est compact. Supposons les hypothèses énoncées. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et d'après le théorème précédant, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence. Par fermeture de K, cette valeur d'adhérence en est élément. On a montré que K est un compact. ■

Théorème 62 : Equivalence de Normes en Dimension Finie :

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E. On va montrer qu'elle est équivalente à la norme infinie, ce qui assurera la véracité du théorème par transitivité.

La sphère unité S de E pour la norme infinie est fermé et bornée. Ainsi, elle est compacte d'après le théorème de Borel-Lesbegues. Maintenant, montrons que l'application $f : \begin{array}{ccc} (E, \|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$ est continue. Mais,

$$\forall x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \in E, \quad \begin{aligned} \|x\| &= \left\| \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{p} |x_i| \, \|e_i\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{p} \|x\|_\infty \, \|e_i\| \\ &= \|x\|_\infty \left(\sum_{i=1}^{p} \|e_i\| \right). \end{aligned}$$

Si on note $k = \sum_{i=1}^{p} \|e_i\|$, alors $\forall x \in E, \quad \|x\| \leq k\|x\|_\infty$. Ainsi,

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq k\|x - y\|_\infty.$$

Donc f est lipschitzienne et en particulier continue. Ainsi, $f(S)$ est un compact de $\mathbb{R}$. D'après le Théorème 58, $f(S)$ admet un minimum et un maximum atteints que l'on notera respectivement α et β.

Maintenant, $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$; il existe $x_1, x_2 \in S$ tels que $f(x_1) = \alpha$ et $f(x_2) = \beta$. Ainsi, $\|x_1\| = \alpha$ $\|x_2\| = \beta$. Puisque $|x_1\|_\infty = |x_2\|_\infty = 1$, alors $x_1 \neq 0$ et $x_2 \neq 0$, fournissant $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.

Finalement, soit $x \in E \setminus \{0\}$. Alors $\frac{1}{\|x\|_\infty} x \in S$. Donc

$$\alpha \leq f\left(\frac{1}{\|x\|_\infty} x \right) \leq \beta$$

ou encore

$$\alpha \leq \left\| \frac{1}{\|x\|_\infty} x \right\| \leq \beta$$

soit

$$\alpha\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \beta\|x\|_\infty.$$

Cette inégalité reste vrai même pour $x = 0$. Le résultat est établi. ■

Théorème 63 : Théorème de Bolzano-Weierstrass :

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute suite bornée admet une sous-suite convergente (peu importe la norme utilisée).

Démonstration. D'après les Théorèmes 60 et 62. ■

Théorème 64 : Théorème de Borel-Lesbegues en Norme Infinie :

En dimension finie, les compacts sont les parties fermées et bornées.

Démonstration. D'après les Théorèmes 61 et 62. ■

Théorème 65 : Suites de Cauchy : Propriétés :

- Une suite convergente est de Cauchy.
- Une suite de Cauchy est bornée.
- Une suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence converge.

Démonstration. • Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ convergente, disons vers $\ell \in E$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\exists N \in \mathbb{N}/\forall n \geq N, \quad \|u_n - \ell\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soient $n, m \geq N$. Alors

$$\|u_n - u_m\| \leq \|u_n - \ell\| + \|u_m - \ell\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

D'où le résultat.

• Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ de Cauchy. Ainsi,

$$\exists N \in \mathbb{N}/\forall n, m \geq N, \quad \|u_n - u_m\| < 1.$$

Alors,

$$\forall n \geq N, \quad \|u_n\| \leq \|u_n - u_N\| + \|u_N\| < 1 + \|u_N\|.$$

Le majorant $M = \max(1 + \|u_N\|, \|u_0\|, \cdots, \|u_{N-1}\|)$ convient.

• Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ de Cauchy et a en est une valeur d'adhérence. Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\exists N \in \mathbb{N}/\forall n, m \geq N, \quad \|u_n - u_m\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit φ une extractrice telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. Alors

$$\exists N' \in \mathbb{N}/\forall n \geq N', \quad \left\|u_{\varphi(n)} - a\right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $n \geq \max(N, N')$. Alors $n \geq N$ et $\varphi(n) \geq N$ (car $\varphi(n) \geq n$) puis

$$\begin{aligned} \|u_n - a\| &\leq \left\|u_n - u_{\varphi(n)}\right\| + \left\|u_{\varphi(n)} - a\right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et vers a. ∎

Théorème 66 : Espaces de Banach de référence :

• $\mathbb{R}$ est de Banach.

• $\mathbb{R}^n$ est de Banach.

• Tout espace de dimension finie est de Banach.

• Soit X un ensemble non vide et $\mathcal{B}(X, E)$ l'ensemble des fonctions bornées à valeurs de X dans E. On le munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$ dont on rappelle la définition :

$$\forall f \in \mathcal{B}(X, E), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|.$$

Si $(E, \|\cdot\|)$ est de Banach, alors $(\mathcal{B}(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ est de Banach.

Démonstration. Le premier résultat est connu depuis le S1. En général, si E est de dimension finie et on considère une suite de Cauchy dans E, alors celle-ci est bornée. Par théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une valeur d'adhérence. Finalement, elle sera une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence, ce qui fournit la convergence. Ceci montre que E est de Banach.

Démontrons le quatrième point. Supposons que E est de Banach (sans mention de norme car il n'y a pas d'ambiguïté). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{B}(X, E))^{\mathbb{N}}$ de Cauchy. Ainsi,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}/\forall n, m \geq N, \quad \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.$$

Ainsi,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}/\forall n, m \geq N, \forall x \in X, \quad \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon \quad (*).$$

En particulier,

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n, m \geq N, \quad \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon.$$

Ceci montre que pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ (qui est à valeurs dans un espace de BANACH) est de CAUCHY. Ainsi, $\forall x \in X, \quad (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Notons pour tout $x \in X, \quad f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$ (ou encore f la limite simple de la suite de fonctions du terme général f_n).

Maintenant dans $(*)$, un passage à la limite pour m est permis ;

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \forall x \in X, \quad \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon.$$

Soit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \quad \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon.$$

Ceci montre que $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\|\cdot\|_\infty} f$. Le résultat est établi.

■

THÉORÈME 67 : THÉORÈME DU POINT FIXE :

Soit E un espace de BANACH et $f : E \longrightarrow E$ contractante *ie.*

$$\exists k \in [0, 1[/ \forall (x, y) \in E^2, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

Alors f admet un unique point fixe. De plus, celui-ci est la limite commune de toutes les suites de la forme

$$\begin{cases} u_0 \in E, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

Démonstration. Commençons par l'unicité, c'est-à-dire on montre que si f admet un point fixe, alors il est unique. Soient ω, ω' deux vecteurs tels que $f(\omega) = \omega$ et $f(\omega') = \omega'$. Alors

$$\|f(\omega) - f(\omega')\| = \|\omega - \omega'\| \leq k \|\omega - \omega'\|.$$

Ainsi, $(1 - k) \|\omega - \omega'\| \leq 0$. Mais $1 - k > 0$, donc $\|\omega - \omega'\| \leq 0$ puis $\|\omega - \omega'\| = 0$. Finalement, $\omega = \omega'$.

Maintenant, l'existence. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie comme dans l'énoncé du THÉORÈME. Le but est de montrer que celle-ci est convergente en montrant qu'elle est de CAUCHY.

On a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u_{n+2} - u_{n+1}\| &= \|f(u_{n+1}) - f(u_n)\| \\ &\leq k \|u_{n+1} - u_n\|. \end{aligned}$$

L' « idée » est donc de répéter ce procès :

$$\begin{aligned} \text{«}\, \|u_{n+2} - u_{n+1}\| &\leq k \|u_{n+1} - u_n\| \\ &\leq k \cdot k \|u_n - u_{n-1}\| \\ &\leq k^3 \|u_{n-1} - u_{n-2}\| \\ &\leq \cdots \text{».} \end{aligned}$$

Une récurrence simple fournit alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|u_n - u_{n-1}\| \leq k^{n-1} \|u_1 - u_0\|$. Deux termes successifs de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc « assez proches ». L'idée est d'établir que n'importe deux termes de la suite sont aussi « assez proches ». Encore une autre fois, l'« idée » est

$$\begin{aligned} \text{«}\, \|u_{n+2} - u_n\| &\leq \|u_{n+2} - u_{n+1}\| + \|u_{n+1} - u_n\| \\ &\leq \left(k^{n+1} + k^n\right) \|u_1 - u_0\| \text{»} \end{aligned}$$

puis

$$\text{«}\, \|u_{n+3} - u_n\| \leq \|u_{n+3} - u_{n+2}\| + \|u_{n+2} - u_n\|$$

$$\leq \left(k^{n+2}+k^{n+1}+k^{n}\right)\|u_1-u_0\| \text{»}$$

Ainsi, on peut montrer par récurrence sur $\alpha = m - n$ que

$$\forall m > n \in \mathbb{N}, \quad \|u_m - u_n\| \leq k^n \left(\sum_{p=0}^{m-n-1} k^p\right) \|u_1 - u_0\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|u_1 - u_0\|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\dfrac{k^n}{1-k}\|u_1 - u_0\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, alors

$$\exists N \in \mathbb{N} / \forall m > n \geq N, \quad \|u_m - u_n\| < \varepsilon.$$

Ceci montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de CAUCHY donc est convergente puisque E est un espace de BANACH. Notons ℓ sa limite. f est continue car lipschitzienne et alors,

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) = f(\ell).$$

Ceci montre l'existence d'un point fixe de f. ■

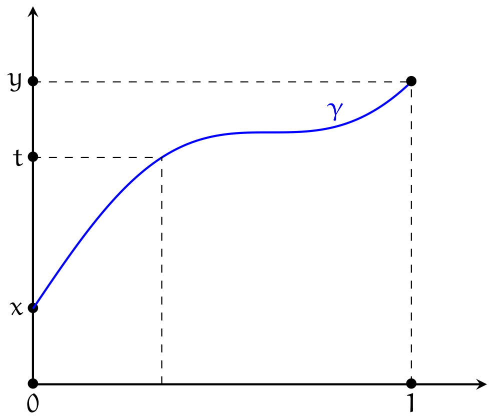
THÉORÈME 68 : CONNEXITÉ PAR ARCS DANS $\mathbb{R}$:

Les connexes par arcs dans $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Démonstration. $\Longrightarrow$) Un intervalle est convexe donc connexe par arcs.

$\Longleftarrow$) Soit $A \subset \mathbb{R}$ un connexe par arcs non vide. On ne discutera pas le cas trivial où A est vide.

Soient $x \leq y \in A$. Montrons que $[x, y] \subset A$. Si $x = y$, c'est immédiat. Dorénavant, $x \neq y$. Soit $t \in [x, y]$. Il existe une fonction $\gamma : [0, 1] \longrightarrow A$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.



Le théorème des valeurs intermédiares affirme alors l'existence de $\eta \in [0, 1]$ tel que $\gamma(\eta) = t$. Or, $\gamma([0, 1]) \subset A$. Ainsi, $t \in A$. Le théorème est établi. ■

THÉORÈME 69 : LE THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIARES (GÉNÉRALISÉ) :

L'image continue d'un connexe par arcs est un connexe par arcs.

En particulier, si $F = \mathbb{R}$, l'image d'un continue d'un connexe par arcs est un intervalle.

Démonstration. Soient $f : E \longrightarrow F$ continue et $A \subset E$ connexe par arcs. Soient $(z, t) \in (f(A))^2$. Notons alors $x, y \in A$ tels que $f(x) = z$ et $f(y) = t$. Par connexité de A, il existe un chemin continue γ joignant x et y. Posons $\xi = f \circ \gamma : [0, 1] \longrightarrow f(A)$. On a $\xi(0) = f(\gamma(0)) = f(x) = z$ et $\xi(1) = f(\gamma(1)) = f(y) = t$. De plus, $\gamma([0, 1]) \subset A$ donc $\xi([0, 1]) = f(\gamma([0, 1])) \subset f(A)$. Finalement, ξ est continue tant que composée de fonctions continues. Ainsi, ξ est un chemin continue joignant z et t, fournissant que $f(A)$ est connexe par arcs. ■

THÉORÈME 70 : FONCTIONS LOCALEMENT CONSTANTES ET CONNEXITÉ :

Toute fonction localement constante sur un connexe par arcs est constante.

Démonstration. Soient $A \subset E$ un connexe par arcs et $f : A \longrightarrow F$. Supposons que f est localement constante *ie.*

$$\forall x \in A, \exists r > 0 / \exists C_x \in F / \quad f_{|B(x,r)} = C_x.$$

Soit $x_0 \in A$. On veut montrer que $\forall x \in A, \quad f(x) = f(x_0)$. Posons alors

$$\begin{aligned} \varphi : \ & A \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \begin{cases} 1, & \text{si } f(x) = f\left(x_0\right), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

On montre que φ est continue. Soit $x \in A$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$. f est localement constante, donc il existe $\varepsilon > 0$ et une constante $C_x \in F$ telle que $\forall t \in B(x, \varepsilon), \quad f(t) = C_x$. D'autre part, à partir d'un certain rang, $x_n \in B(x, \varepsilon)$ soit $f(x_n) = f(x)$ ou encore $\varphi(x_n) = \varphi(x)$ à partir d'un certain rang. Ceci fournit $\varphi(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \varphi(x)$ puis la continuité de φ.

Maintenant, φ est continue sur A connexe par arcs. Ainsi, $\varphi(A)$ est un intervalle. Or, $\varphi(A) \subset \{0, 1\}$. Donc $\varphi(A) \in \{\varnothing, \{0\}, \{1\}\}$. Or, $\varphi(x_0) = 1$, donc $\varphi(A) = \{1\}$. Ceci fournit que $\forall x \in A, \quad f(x) = f(x_0)$. ■

THÉORÈME 71 : PARTIES OUVERTES ET FERMÉES D'UN CONNEXE PAR ARCS :

La seule partie non vide d'un connexe par arcs A qui est à la fois ouverte et fermée (sous la topologie induite par A) est A.

Démonstration. Soit $P \subset A$ non vide une partie à la fois ouverte et fermée relativement à A. Notons $f = \mathbb{1}_P : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrons que f est continue, en montrant que l'image réciproque de tout ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert relatif de A. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$.

- Si $0 \notin O$ et $1 \notin O$, alors $f^{-1}(O) = \varnothing$ (qui est un ouvert relatif de A).
- Si $0 \notin O$ et $1 \in O$, alors $f^{-1}(O) = P$ (qui est ouvert relatif de A).
- Si $0 \in O$ et $1 \notin O$, alors $f^{-1}(O) = A \setminus P$ (qui est ouvert relatif de A par fermeture relative de A).
- Si $0 \in O$ et $1 \in O$, alors $f^{-1}(O) = A$ (qui est ouvert relatif de A).

Ainsi, f est continue. Donc $f(A)$ est un intervalle. Or, $\varphi(A) \subset \{0, 1\}$. Ainsi, $\varphi(A) = \{0\}$ ou $\varphi(A) = \{1\}$. Mais P est non vide, donc $\exists x_0 \in A / \quad f(x_0) = 1$. Donc $f = 1$. Ceci fournit $\mathbb{1}_P = \mathbb{1}_A$ puis $P = A$. ■

THÉORÈME 72 : COMPOSANTES CONNEXES PAR ARCS :

Soit $A \subset E$ non vide.

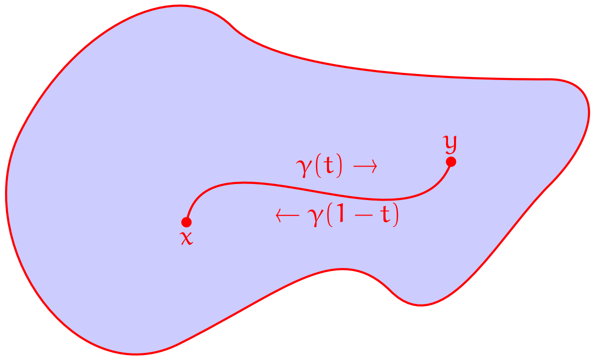
La relation $\sim_A$ définie sur A^2 par

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad x \sim_A y \Longleftrightarrow \exists \gamma \in \mathcal{C}([0, 1], A) / \quad \begin{cases} \gamma(0) = x, \\ \gamma(1) = y \end{cases}$$

est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences pour $\sim_A$ sont connexes par arcs dites composantes connexes par arcs de A.

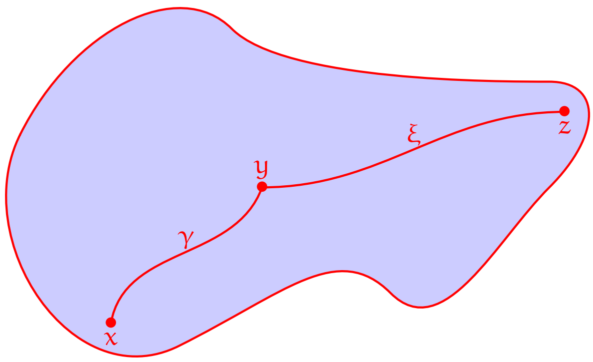
Démonstration. Soient $x, y, z \in A$. La fonction γ constante en x sur $[0, 1]$ est un chemin continue joignant x et lui-même. Donc $x \sim_A x$.

Maintenant, supposons que $x \sim_A y$. Soit γ un chemin continue joignant x et y. Le chemin « inverse » $t \longmapsto \gamma(1-t)$ joigne y et x et est continue à valeurs dans A. Ainsi, $y \sim_A x$.



Supposons maintenant que $x \sim_A y$ et $y \sim_A z$. Soient γ et ξ les deux chemins joignant respectivement x et y, puis y et z. Le chemin τ obtenu par « concatenation » des deux chemins est continue, à valeurs dans A et joigne x et z :

$$\forall t \in [0,1], \quad \tau(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}, \\ \xi\,(2t-1) & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$



Ainsi, $x \sim_A z$. On a montré que $\sim_A$ est une relation d'équivalence.

Maintenant, soient $x \in A$ et $(a,b) \in (\mathrm{cl}(x))^2$. Alors $a \sim_A x$ et $x \sim_A b$. Donc $a \sim_A b$. Ainsi, il exsite un chemin continu γ joignant a et b à valeurs dans A. Supposons qu'il existe $t_0 \in [0,1]$ de sorte que $c := \gamma\,(t_0) \notin \mathrm{cl}(x)$. Ainsi, c et a ne sont pas en relation par rapport à $\sim_A$.

D'autre part, $c \sim_A a$; d'abord, $t_0 \neq 0$ car dans le cas contraire, $c = \gamma(0) = a$. Or, a est dans la classe de x bien que c ne l'est pas. Puis, on considère le chemin continu $\widetilde{\gamma} : t \longmapsto \gamma\,(t_0 t)$. $\widetilde{\gamma}$ est continu sur $[0,1]$ à valeurs dans A et vérifie $\widetilde{\gamma}(0) = \gamma(0) = a$ et $\widetilde{\gamma}(1) = \gamma\,(t_0) = c$. Ainsi, $a \sim_A c$. Puisque $a \sim_A x$, alors $c \sim_A x$, contredisant $c \notin \mathrm{cl}(x)$.

Ainsi, $\gamma([0,1]) \subset \mathrm{cl}(x)$. Le résultat est établi. ■

Calcul Différentiel

Dans toute la suite, E et F sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimensions finies.

Théorème 1 : Différentiabilité :

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, U un ouvert de E et $f : U \longrightarrow F$. Soit $a \in U$.

Si f est différentiable en a *ie.* il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + \varphi(h) + o\left(\|h\|\right),$$

alors φ est unique et est appelée la différentielle de f en a, notée $df(a)$.

Démonstration. Supposons l'existence de deux applications linéaires φ et ψ vérifiant l'énoncé. Alors

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + \varphi(h) + o\left(\|h\|\right) \underset{h \to 0}{=} f(a) + \psi(h) + o\left(\|h\|\right).$$

Soit $(\varphi - \psi)(h) \underset{h \to 0}{=} o\left(\|h\|\right)$ ou encore, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\|h\|}(\varphi - \psi)(h) = 0$. Soit $u \in E \setminus \{0\}$.

Notons $h = tu$ où t est un paramètre réel strictement positif. Alors

$$\frac{1}{\|h\|}(\varphi - \psi)(h) = \frac{1}{\|tu\|}(\varphi - \psi)(tu) = \frac{1}{\|u\|}(\varphi - \psi)(u).$$

Ainsi, le passage à la limite pour $t \to 0^+$ donne

$$\frac{1}{\|u\|}(\varphi - \psi)(u) = 0.$$

Ainsi, $\varphi(u) = \psi(u)$. De plus, cette égalité est vraie même pour $u = 0$. Ceci montre que $\varphi = \psi$. ∎

Théorème 2 : Différentiabilité et Continuité :

Si f est différentiable en a, alors elle y est continue.

Démonstration. Supposons la différentiabilité en a. Alors

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + df(a) \cdot h + o\left(\|h\|\right).$$

Ainsi, quad h tend vers 0, $df(a) \cdot h$ tend vers 0 car $df(a)$ est linéaire sur E qui est de dimension finie donc est continue. Ainsi,

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a).$$

Ceci achève la démonstration. ∎

Notons :

Différentiabilité en a $\Longrightarrow$ Continuité en a $\Longrightarrow$ Continuité des fonctions partielles en a

Toute implication non mentionnée étant fausse.

Théorème 3 : Différentiabilité et Dérivée suivant un Vecteur :

Si f est différentiable en a, alors f est dérivable suivant tout vecteur v en a et :

$$D_v f(a) = df(a) \cdot v.$$

Démonstration. Supposons que f est différentiable en a. Soit $v \in E$. En particulier,

$$f(a+tv) \underset{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}{=} f(a) + df(a)\cdot(tv) + o\left(|t|\|v\|\right)$$

ou encore

$$f(a+tv) - f(a) \underset{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}{=} t\,df(a)\cdot v + o(t)\,.$$

Ceci donne

$$\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} \underset{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}{=} df(a)\cdot v + o(1)\,.$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = df(a)\cdot v$. En particulier, f est dérivable en a suivant v et $D_v f(a) = df(a)\cdot v$. ■